

Elementär kombinatorik

1 Problem att börja med

1. Bestäm värdet på följande binomialkoefficienter: $\binom{7}{4}$, $\binom{10}{5}$.
2. Antag att du drar fyra slumpässiga kort från en standardkortlek. Vad är sannolikheten att du får antingen fyra kort i samma färg eller fyra kort i fyra olika färg?
3. Hur många olika vinnande 3-korts 'sets' finn det i spelkortet *Set*?



(Spelreglerna kan du hitta på: [https://en.wikipedia.org/wiki/Set_\(card_game\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Set_(card_game))).

4. Bestäm värdet på summan $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k}$.
5. Visa att $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$. Kan du göra det med ett rent kombinatoriskt resonemang?
6. Utveckla uttrycket $(1+x)^7$.
7. Bestäm värdet på $\sum_{k=3}^{2026} \binom{n}{k} 3^k$.

2 Problem

Obs: alla tal i dessa problem är heltal.

1. Given ett positivt heltal n , vilka värde på k maximerar värdet på $\binom{n}{k}$? (Med andra ord, vilka är den mest populär storlek för en delmängd till en mängd med n element?)
2. Visa att $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
3. Visa Vandermondes identitet: $\binom{m+n}{k} = \sum_{\ell=0}^k \binom{m}{\ell} \binom{n}{k-\ell}$.
4. Visa med kombinatorisk resonemang att $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$.
5. Visa att $\sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = 3^n$.
6. På hur många olika sätt kan man fördela $2n$ personer i n par?
7. Visa att $\binom{n}{k} \binom{n+k}{k} = \binom{2k}{k} \binom{n+k}{2k}$.
8. Hitta en formel som ger värdet på summan $\sum_{k=1}^n k^3$.
9. Bestäm konstanttermen i $(\frac{1}{x^2} + x^4)^{12}$.
10. På hur många sätt kan man fördela n identiska godisbitar bland r forskare, så att alla forskare får ett udda antal godisbitar?
11. På hur många olika sätt kan man bilda en 0–1 sekvens med längd n som innehåller r ettor och sådan att det inte finns två ettor som följer på varandra?
12. Hur många 0–1 sekvenser men längd n kan man bilda så att det inte finns två ettor som följer på varandra?

Ledtråd: här kan det var lämpligt att betrakta Fibonacci talen. Fibonacci talen definieras genom $F_0 = F_1 = 1$, och rekursion $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$ för alla $m \geq 0$. Man kan visa med matematisk induktion att

$$F_m = \frac{\phi^m - (-\phi^{-1})^m}{\phi + \phi^{-1}},$$

där $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ är gyllene snittet.

Frågor? Skicka ett mejl till victor.falgas-ravry@umu.se om du inte förstår ett problem, och ta gärna med dina lösningar till nästa passet om du vill att vi kollar genom dem med dig.