

Heltalsdelen och bråkdelen

Kom ihåg att *heltalsdelen* $\lfloor x \rfloor$ är det största heltalet som är mindre än eller lika med x , det vill säga $\lfloor 3,3 \rfloor = 3$, $\lfloor 5,7 \rfloor = 5$ och $\lfloor -6,2 \rfloor = -7$. Kom också ihåg *bråkdelen* $\{x\}$ som är definierad att vara $x - \lfloor x \rfloor$.

Problem 1. Lös ekvationen $\lfloor 2x + 3 \rfloor = 5$.

Problem 2. Lös följande ekvationer:

- a) $\lfloor x \rfloor = x$
- b) $\{x\} = x$
- c) $\lfloor x \rfloor = \{x\}$

Problem 3. Finns det några lösningar till ekvationen $\lfloor x \rfloor + 2 = x$?

Problem 4. Visa att $x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$. Gäller den omvända implikationen?

Problem 5. Lös ekvationen $\lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor = 0$.

Tips: det kan vara bra att dela upp i olika fall beroende på värdet på x .

Problem 6. Lös ekvationen $\{2x\} = \{x\}$.

I de kommande uppgifterna är Legendres formel användbar, så för enkelhetens skull repeteras den här:

Sats (Legendres formel). Låt n vara ett positivt heltal och låt $p \leq n$ vara ett primtal. Den högsta potensen m av p sådan att p^m delar $n!$ är lika med

$$m = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^4} \right\rfloor + \dots$$

(Summan är inte oändlig. Den fortsätter bara så länge $p^k \leq n$, då alla senare termer blir 0)

Problem 7. Vilket är det största heltalet n så att 9^n delar $80!$?

Problem 8. Vilket är det största heltalet n så att 12^n delar $50!$?

Problem 9. Hur många nollor finns det i slutet på talet $215 \cdot 216 \cdot \dots \cdot 437 \cdot 438$?

Problem 10. För vilka värden på n har $n!$ exakt 5 nollor i slutet?

Fler problem

Problem 11. Visa att $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \implies |x - y| < 1$. Gäller den omvända implikationen?

Problem 12. Lös ekvationen $\lfloor \lfloor x \rfloor \{x\} \rfloor = 0$.

Problem 13. För alla positiva heltal n , visa att antalet nollor i slutet av $(2n)!$ är minst dubbelt så många som för $n!$.

Problem 14 (Exempel 12.5 i [Vaderlind]). Visa att $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ för alla $x \geq 0$.

Problem 15 (Exempel 12.9 i [Vaderlind]). Lös ekvationen $\left\lfloor \frac{5 + 6x}{8} \right\rfloor = \frac{15x - 7}{5}$

I slutet av kapitel 12 i Vanderlinds *Matematiska utmaningar* finns ännu fler problem.