Aritmetisk Ramsey Teori

1 Problem vi jobbade med under passet

Definition. *En aritmetisk följd med längd k, eller k-AP, är en mängd heltal med formen $\{a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots\ , a+(k-1)d\}$.*

Definition. *Har man färlagt en mängd tal M, så sägs en delmängd $D \subseteq M$ vara monochromatiskt om alla element i D har samma färg.*

Vi använder beteckningen $\mathbb{Z} := \{\ldots\ ,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$, $[N] := \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ N-1,\ N\}$ och $[N] \times [M] := \{(x,y) :\ x \in [N],\ y \in [M]\}$.

Problem 1.1. *Visa att man kan färlägga heltalsmängden* $[8]$ *med två färger på sånt sätt att det inte finns en monochromatiskt* 3-AP.

Problem 1.2. *Visa att oavsett hur man färlägger heltalsmängden* $[9]$ *med två färger, så kommer en monochromatiskt* 3-AP *att uppstå.*

Problem 1.3. *Visa att det finns ett positivt heltal W sådant att oavsett hur man färlägger heltalsmängden $[W]$ med tre färger, så kommer en monochromatiskt* 3-AP *att uppstå.*

Problem 1.4. *Låt c vara ett positivt heltal. Visa att det finns ett heltal N sådant att oavsett hur man färlägger mängden $[N] \times [N]$ med c färger, så kommer en monochromatiskt rektangel att uppstå (d.v.s. fyra punkter (x,y), $(x+a,y)$, $(x,y+b)$, $(x+a,y+b)$ i samma färg, där heltalen a,b är positiva).*

Problem 1.5. *Visa att det finns ett heltal N sådant att oavsett hur man färlägger mängden $[N]\times[N]$ med två färger på så kommer ett monochromatiskt kvadrathörn att uppstå (d.v.s. tre punkter (x,y), $(x+a,y)$, $(x,y+a)$ i samma färg, där $a>0$).*

2 Mycket svårare problem att fundera på hemma

Problem 2.1. *Låt c vara ett positivt heltal. Visa att det finns ett positivt heltal W_c sådant att oavsett hur man färglägger heltalsmängden $[W]$ med c färger, så kommer en monochromatiskt 3-AP att uppstå.*
Ledtråd: använd induktion på c samt vår "colour-focussing" bevisteknik.

Problem 2.2. *Visa att det finns ett heltal N sådant att oavsett hur man färglägger mängden $[N] \times [N]$ med två färger på så kommer en monochromatiskt kvadrat att uppstå (d.v.s. fyra punkter (x, y), $(x + a, y)$, $(x, y + a)$, $(x + a, y + a)$ i samma färg, där $a > 0$).*
Ledtråd: lös den andra problem först.

Frågor? Då kan du skicka ett mejl till `victor.falgas-ravry@umu.se`.