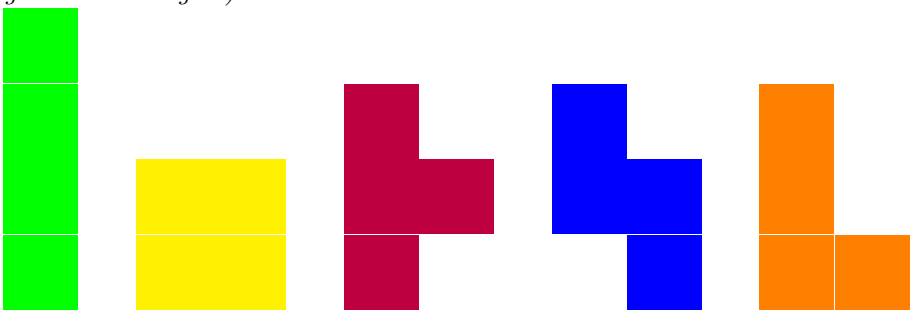
Täckningsproblem och färgläggningsargument

1 Problem vi kommer att jobba med idag

Problem 1.1. *Går det att övertäcka en* 4×5 *rektangel med följande fem tetrominos? (Rotationer är tillåtna, men varje tetromino får användas endast en gång i övertäckningen.)*



Problem 1.2. *Kan ett* 10×10*-rutnät övertäckas med två* 2×2*-brickor och* 23 *brickor bestående av fyra rutor vardera i form av bokstaven* L*, som den orange bricka i figuren ovan? Den andra brickan kan, vid behov, roteras och/eller vändas.*

Problem 1.3. *Ett* 8×8*-rutnät övertäcks med 32 dominobrickor. Visa att antalet dominobrickor som ligger horisontellt på rutnätet är ett jämnt tal.*

Problem 1.4. *Kan ett* 10×10*-rutnät övertäckas med*

(i) 25 'T-brickor' (den röda bricka i figuren ovan)?

(ii) 25 1×4 *brickor (den gröna bricka i figuren ovan)?*

Problem 1.5. *Kan ett* 10×14*-rutnät övertäckas med* 1×4 *brickor?*

Problem 1.6. *Lasses rektangulära uteplats är täckt med betongplattor. Vissa plattor har formen av* 2×2*-brickor, andra har formen av* 1×4 *brickor. En av plattorna har gått sönder, men som en eventuell ersättning har Lasse bara en enda platta av den andra sorten. Kan Lasse ersätta den trasiga plattan med den han har genom att eventuellt rearrangera de plattor som finns på uteplatsen?*

Problem 1.7.

(i) På skolgården ritade barnen ett rutnät med sex rader och sex kolonner. I var och en av de 36 rutorna ställde sig ett barn. På lärarens signal hoppade varje barn till en angränsande ruta (två rutor är angränsande om de har en gemensam sida). Kan denna förflyttning organiseras så att det på slutet återigen finns ett barn i varje ruta?

(ii) Ett av barnen fick ont i magen och avbröt leken, varför de övriga ritade ett nytt rutnät med sju rader och fem kolonner. Hur kan barnen organisera förflyttningen om de vill fortsätta att leka samma lek?

Problem 1.8. *Ett rektangulärt $m \times n$-rutnät är övertäckt med 6×1-brickor. Visa att talet 6 måste vara en delare till minst ett av talen n och m.*

Problem 1.9. 21 *trominobrickor (tre kvadrater limmade ihop i en rad) kan tillsammans täcka 63 rutor på ett 8×8-rutnät. En av rutorna blir alltså icke-övertäckt. Vilka är de möjliga positionerna där den tomma rutan kan finnas?*

2 Problem att prova hemma

Problem 2.1. *På varje ruta i ett 9×9 rutnät sitter en sköldpadda. När en klocka ringer så flyttar varje sköldpadda till en ruta som ligger diagonalt mittemot deras nuvarande ruta. Vad är minsta antalet tomma (dvs sköldpaddafria) rutor efter klockan har ringt?*

Problem 2.2. *Alice och Bengt spelar följande spel på ett schackbräde. Med hennes första drag får Alice placera en springare på en valfri ruta. Efter det så turas om Bengt och Alice att flytta springaren med ett tillåtet schackdrag med restriktionen att springaren måste landa på en ruta den har inte besökt än. Den som först finner sig i en position där hen kan inte flytta springaren förlorar spelet. Visa att Bengt har en vinnande strategi.*

Problem 2.3. *Visa att ett $m \times n$ rutnät kan övertäckas med $1 \times a$ brickor om och endast om talet a delar minst ett av talen m eller n.*

Problem 2.4. *Ett 7×7 rutnät är övertäckt med 16 styck 3×1 brickor och en 1×1 bricka. Bestäm var i rutnätet 1×1 brickan kan finnas. (Obs: Detta problem har två delar. Först måste du bevisa att man kan placera 1×1 brickan på vissa rutor. Sedan måste du bevisa att inga andra placeringar är möjliga.)*

Problem 2.5. *Ett kvadratisk 6×6 rutnät övertäcks med 2×1 dominobrickor. Bevisa att det finns en lodrätt eller vågrätt linje genom rutnätet som inte skär igenom någon av dominobrickorna.*

Obs: Vissa problem hämtades ur Paul Vaderlinds utmärkt bok *Matematiks Utmaningar* (andra upplagan, 2021).

Frågor? Då kan du skicka ett mejl till `victor.falgas-ravry@umu.se`.