

UMU REPORTS IN STEM EDUCATION 2026:I

En modell för hur lärare kan arbeta för att alla elever ska kunna ta sig an matematiska problem

Andrea Sundberg, Anna Modig, Anna Samuelsson, Catarina Andersson, Johan Lithner, Ulrika Sjölund & Veronika Tängdén

Institutionen för naturvetenskapens och matematikens didaktik



UMEÅ UNIVERSITET

ISSN 3035-837X
ISBN 978-91-8070-924-8

En modell för hur lärare kan arbeta för att alla elever ska kunna ta sig an matematiska problem © 2026 av Andrea Sundberg, Anna Modig, Anna Samuelsson, Catarina Andersson, Johan Lithner, Ulrika Sjölund & Veronika Tängdén är licensierad under [CC BY-NC-ND 4.0](#)

Umeå reports in STEM education publicerar texter med anknytning till didaktisk forskning om STEM-ämnena: naturvetenskap, teknik, ingenjörsvetenskap och matematik. Texterna i denna rapportserie genomgår ingen granskningsprocess, utöver en bedömning av att syftet och villkoren för rapportserien är uppfyllda. Författarna är fullt ut ansvariga för vetenskaplig kvalitet, att etiska riktlinjer följs, att relevanta rättigheter för publicering av bilder finns, språkgranskning, layout samt att texterna i övrigt följer relevanta regler och god praxis.

Du har tillstånd att:

Dela – kopiera och vidare distribuera materialet oavsett medium eller format. Licensgivaren kan inte återkalla dessa friheter så länge du följer licensvillkoren.

På följande villkor:

Erkännande – Du måste ge [ett korrekt erkännande](#), ange en hyperlänk till licensen, och [ange om bearbetningar är gjorda](#). Du behöver göra så i enlighet med god sed, och inte på ett sätt som ger en bild av att licensgivaren stödjer dig eller ditt användande.

IckeKommersiell – Du får inte använda materialet för [kommersiella ändamål](#).

IngaBearbetningar – Om du [remixar, transformerar, eller bygger vidare på](#) materialet, får du inte distribuera det modifierade materialet.

Inga ytterligare begränsningar – Du får inte tillämpa lagliga begränsningar eller [teknologiska metoder](#) som juridiskt begränsar andra från att göra något som licensen tillåter.

Anmärkningar:

Du behöver inte följa licensvillkoren för de delar av materialet som finns i public domain eller där ditt användande är tillåtet av en tillämplig [undantag eller begränsning](#).

Inga garantier ges. Licensen ger eller ger dig inte alla de nödvändiga villkoren för ditt tänkta användande av verket. Till exempel, andra rättigheter som [publicitet, integritetslagstiftning, eller ideella rättigheter](#) kan begränsa hur du kan använda verket.

Referera till denna rapport genom att ange:

Sundberg, A., Modig, A., Samuelsson, A., Andersson, C., Lithner, J., Sjölund, U., & Tängdén, V. (2026). *En modell för hur lärare kan arbeta för att alla elever ska kunna ta sig an matematiska problem* (UmU Reports in STEM Education 2026:1). Umeå universitet.
https://www.umu.se/globalassets/organisation/fakulteter/teknat/institutionen-for-naturvetenskapernas-och-matematikens-didaktik/urSTEME/URSTEME_2026_1.pdf

En modell för hur lärare kan arbeta för att alla elever ska kunna ta sig an matematiska problem

<i>Inledning.....</i>	<i>2</i>
<i>Framtagandet av modellen</i>	<i>2</i>
<i>Matematiska problem och faser i problemlösning.....</i>	<i>3</i>
Matematiska problem	3
Problemlösningsprocessens faser	4
<i>Undervisning riktad mot tolkningen och utforskningens karaktärsdrag.....</i>	<i>5</i>
Hjälpande ord	5
Representation	6
<i>Att arbeta med modellen.....</i>	<i>7</i>
Ett språkstärkande och socialt utvecklande arbete.....	8
Undervisning om Hjälpande ord	9
Att vidareutveckla arbetet med Hjälpande ord.....	12
Undervisning om Representation.....	18
Slutsatser	23
<i>Referenser.....</i>	<i>24</i>

Inledning

Den här texten kommer att beskriva en modell som lärare kan ta stöd av för att i sin undervisning stötta sina elever att ta sig an matematiska problem. Modellen har utvecklats i ett samarbetsprojekt mellan lärare, utvecklingsledare och forskare. Undervisningsmodellen är riktad mot hela klassen, men innehåller förutom helklassdiskussion, även inslag av enskilt arbete och par-arbete.

Textens första delar ger läsaren en inblick i framtagandet av modellen och vad problemlösning i matematik innebär. Efter detta kommer beskrivningen av undervisningsmodellen (sidan 4–21), först lite mer teoretiskt och sedan med inriktning på praktisk tillämpning. De teoretiska delarna är dock viktiga för att kunna förstå hur modellen fungerar.

Framtagandet av modellen

Initialt inspirerades lärargruppen av en vilja att hitta en modell för att få med sig alla eleverna i klassen i matematisk problemlösning — på ett liknande sätt som man i ämnet svenska arbetat med boksamtal för att få med alla elever i läsupplevelser.

Behovet av en sådan modell hade uppstått utifrån att lärarna upplevde att några av deras elever oftast blev sittande med ett tomt papper framför sig vid problemlösning i matematik. Av olika anledningar ville eller kunde eleverna inte ta sig an uppgiften. Lärarna upplevde att eleverna saknade fungerande strategier för att självständigt kunna starta upp arbetet vid dessa lektioner och ville hitta sätt att lära ut generella strategier att använda just vid starten av uppgifter. Vi tror att även andra matematiklärare delar den upplevelsen och därmed kan vara intresserade av att ta del av vår modell.

En viktig utgångspunkt var att utveckla en modell som lärare kan använda i helklassundervisning. Att jobba med elever enskilt är allt för tidskrävande och oftast praktiskt omöjligt för läraren.

Målet för projektet formulerades: *Att utveckla en modell och struktur för undervisning som ska hjälpa eleverna att kunna komma igång med problemlösning, att resonera sig fram och utveckla tolkning och utforskande av matematiken i uppgiften.* Detta ska förstås som att målet med undervisningsinslagen begränsas till att alla elever ska kunna ta sig an matematiska problem och att målet att lösa uppgiften ligger bortom detta mål.

På så sätt har vi fokuserat på fas ett och två i processen för problemlösning i matematik (Lithner m fl., 2025) — Tolkning och Utforskning — och vi har gjort ett medvetet bortval av de två senare faserna, Skapa lösningsidé och Omsätta lösningsidé. Inte sällan hoppar elever över utforskningen för att direkt söka en lösningsmetod, med en otillräcklig insikt om de matematiska egenskaper som elevens resonemang bör bygga på. Därför är det viktigt att elever lär sig att utforska problemet, och särskilt vid utmanande problem eller om eleven ännu inte utvecklat fungerande generella ansatser och strategier för problemlösning.

Medan Tolkning innebär att förstå informationen, så handlar Utforskning om att få en bättre känsla för vad problemet handlar om och vilka matematiska begrepp, egenskaper och samband som då eventuellt, i nästa fas, skulle kunna användas för att skapa en lösningsidé.

Som ett första steg i framtagandet av modellen undersökte vi vad det var som hindrade eleverna från att ta sig an ett problem. I den efterföljande diskussionen kunde vi konstatera att det finns många olika typer av skäl, men mer specifikt kopplat till matematisk problemlösning fann vi följande svårigheter:

1. att förstå enskilda ord/begrepp
2. att kunna tolka och förstå sammanhanget, och
3. att förstå matematiken i problemet.

Utifrån detta arbete kunde vi identifiera och formulera vad vi kallade för ”tolkningens och utforskningens karaktärsdrag”, dvs. vad som kännetecknar det eleven behöver göra för att kunna tolka och utforska i den matematiska problemlösningsprocessen. (Processen kommer att beskrivas längre fram i texten.)

Två karaktärsdrag definierades, som innebär: att hitta de bärande orden i texten för att kunna tolka och förstå sammanhanget (*Hjälpande ord*), samt att sedan konstruera representationer av det matematiska problemet i uppgiften (*Representation*). Vår tanke var att formuleringen av karaktärsdragen sedan skulle vägleda vår utformning av undervisningsinslag i modellen (*Hjälpande ord* och *Representation*). Vid det här laget blev den språkstärkande aspekten av modellen tydligt framträdande, eftersom eleverna behöver definiera och förstå ord och begrepp. Detta görs enligt modellen tillsammans i helklass, vilket gör att eleverna kan ta hjälp av lärare och varandra för att utvidga sin förståelse för begrepp samt det matematiska sammanhanget.

Projektets träffar användes fortsättningsvis till att först planera undervisningsinslag med inriktning mot ett av karaktärsdragen. Lärarna prövade sedan undervisningsinslagen i sin klass, samt gjorde en dokumentation av sina klassrumsförsök. Vid nästa träff följde vi upp försöken och en ny cykel av planering-försök-utvärdering inleddes. Under arbetets gång tog vi fram denna text vilken beskriver de erfarenheter och lärdomar som genererades under arbetet — formulerat som ett förslag på modell för undervisning om att ta sig an matematiska problem.

I denna text delar vi med oss av beprövade erfarenheter, modellen har ännu inte prövats systematiskt ur ett forskningsperspektiv. I texten används begreppet ”uppgift” som en övergripande term som innefattar alla uppgifter eleven förväntas arbeta med. Det finns två varianter av uppgifter: *Problem* där eleven behöver konstruera en lösning och *rutinuppgift* där eleven har en tillgänglig metod. För att förankra våra erfarenheter i tidigare forskning beskriver vi i nästa kapitel den definition och problemlösningsprocess som vi utgått ifrån.

Matematiska problem och faser i problemlösning

Några av deltagarna i detta samverkansprojekt hade tidigare varit med i ett större forskningsprojekt inriktat på hur man stöttar elevers egna matematiska resonemang i matematisk problemlösning (Se Lithner m fl., 2025). I det forskningsprojektet användes följande beskrivning av matematiska problem och faser i problemlösningsprocessen.

Matematiska problem

Ett *problem* definieras som en uppgift där eleven inte har en på förhand känd eller given lösningsmetod (se även Skolverkets kommentarmaterial till kursplanen i matematik). Det innebär att eleven behöver *resonera* sig fram till en lösning av problemet. Med matematiska resonemang menas att konstruera en tankegång som stöds av matematiska argument. Uppgifter som finns i läromedel är oftast *rutinuppgifter*, det vill säga uppgifter där lösningsmetoden anges. Lärare behöver därför ofta söka matematiska problem på annat håll. Det är dock viktigt att tänka på att när eleverna arbetar med matematiska problem, finns ändå en risk att läraren tillhandahåller lösningsmetoden och därmed tar bort behovet av resonemang för att lösa problemet (som därmed omvandlats till en rutinuppgift).

Problemlösningsprocessens faser

Processen för problemlösning i matematik kan delas in i fyra faser: Tolka, Utforska, Skapa lösningsidé och Omsätta lösningsidé (se äv. Lithner m fl., 2025). Dessa faser är en förenkling av verkligheten, men de kan hjälpa oss att förstå vad problemlösningsprocessen innebär för våra elever och hur undervisning i problemlösning kan utformas. De två första faserna beskrivs här mer ingående eftersom undervisningsmodellen som presenteras i denna text är inriktad mot dessa faser.

Att tolka problemet

I den första fasen tolkar eleven informationen i uppgiften. Den skriftliga informationen omfattar oftast text, ibland kombinerat med symboler, tabeller, figurer, bilder, mm. Tolkningen inkluderar att förstå vad som efterfrågas och ibland även att inse vilket format svaret ska ha, till exempel om det ska vara kort eller utförligt. Att skapa en lösning ingår inte, även om man i praktiken ibland påbörjar det parallellt med tolkningen. Det ingår inte heller att utforska eller på andra sätt resonera sig fram till egenskaper och samband eller dra andra slutsatser som inte är uttryckligt formulerade i uppgiften, t ex vem som är äldst av personerna i nedanstående problem

I nedanstående problem används enbart text och inga bilder eller ytterligare symboler. Vid en korrekt tolkning förstår eleven att hen ska räkna ut Theas ålder.

*Julie, Hilde och Thea är tillsammans 43 år.
Hilde är tre år äldre än Julie och fyra år yngre än Thea.
Hur många år är Thea?*

(Från Alseth m fl., 2017)

En utmaning för eleverna i tolkningsfasen kan vara att förstå betydelsen av ett matematiskt eller vardagligt ord eller formulering. I vår modell hjälper läraren eleverna att utveckla strategier för att vilja och kunna ta sig an denna utmaning. Eleverna får förståelse för vad det innebär att läsa och tolka en text i ett matematiskt problem och varför det är viktigt att "inte ha för bråttom", utan att faktiskt ägna tid åt denna fas vid problemlösning.

I problemet ovan kan eleven fastna vid att inte kunna särskilja hur personernas åldrar förhåller sig till varandra, men också att den inte tolkar begreppen "äldre än" och "yngre än" utifrån att dessa begrepp förhåller sig till varandra. Frågan i sig innehåller upprepningar av namn vilket gör att elever kan uppleva problemet rörigt och svåröverblickbart: Eleven kan sakna strategier för att strukturera upp informationen. Vissa av svårigheterna med att tolka problemet kan vara generellt språkliga eller kopplade till elevens läsförståelse, medan andra svårigheter med att tolka uppgiften är av matematiskt art. I vår modell har lärarna försökt att särskilja dessa svårigheter för att veta vad elever behöver hjälp med.

Att utforska problemet

Efter att ha förstått problemets information och vad som efterfrågas kan eleven gå över till utforskningsfasen. I denna fas utforskar eleven matematiken genom att undersöka situationen i uppgiften. Eleven lär sig mer om matematiska egenskaper hos t ex begrepp och samband, och försöker dra slutsatser som kan vara användbara för att lösa problemet. Här ingår ofta att utifrån informationen i uppgiften skapa användbara representationer, t ex genom att rita eller använda konkret material. I nedanstående problem skulle elever kunna rita en bräda eller använda Cuisenaire-stavar.

*På en brädgård får man betala per sågning om man vill ha en bräda delad.
Det kostar 18 kronor att få en bräda sågad i tre delar.
Hur mycket kostar det att få den sågad i tolv delar?*

(Från Undvall m fl., 2020)

En utmaning i utforskningsfasen är att veta hur man ska börja. Ofta finns olika möjligheter och man vet inte alltid i förväg hur olika strategier kommer att fungera. I utforskningen ingår ibland att prova sånt som i efterhand visar sig vara oanvändbart eller felaktigt. Vår modell visar på undervisning som ger eleverna en strategi för hur man kan *börja* utforska problemet. Eleverna kan successivt utveckla en förståelse för vad utforskningen innebär och att den är en viktig del i att lära sig matematik.

I ovan nämnda problem skulle eleverna kunna fastna i att de inte tar med all information i uppgiften i sina lösningar, men också att de missuppfattat den matematiska situationen. Exempelvis kan elever räkna ut hur många delar de får eller hur stor kostnaden blir för alla delar, när de egentligen ska ta reda på hur mycket man får betala för varje sågning. De räknar alltså ut kostnaden utifrån brädernas delar istället för antalet sågningar. Att eleverna stöter på problem med detta betyder inte att de fastnat i sin utforskning, utan det handlar i första hand om att eleven behöver arbeta mer med att tolka problemet.

Undervisning riktad mot tolkningen och utforskningens karaktärsdrag

Vi har hittills beskrivit det pedagogiska problem som låg bakom en önskan om att utveckla en undervisningsmodell för att få med alla elever i matematisk problemlösning och hur vi sedan tog oss an denna önskan. Vi har också förankrat vårt arbete i tidigare beskrivningar av problem och problemlösningsprocessen. Vi kommer nu att beskriva de två olika undervisningsinslagen i den modell vi kommit fram till: *Hjälpande ord* och *Representation*.

Hjälpande ord

Undervisningsinslaget *Hjälpande ord* syftar till att eleverna ska veta *att* de kan och *hur* de kan ta sig an ett matematiskt problem. Eleverna som då befinner sig i tolkningsfasen får hjälp att utveckla strategier för att hitta ord kopplade till bärande begrepp och textens mening som helhet — ord som ska hjälpa dem förstå matematiken i problemet. Med hjälp av strategierna kan de alltmer självständigt skapa förståelse för informationen i problemet. Undervisningen går ut på att läraren uppmanar och hjälper eleverna att söka och stryka under viktiga ord i texten, t ex som i detta exempel:

*Julie, Hilde och Thea är tillsammans 43 år.
Hilde är tre år äldre än Julie och fyra år yngre än Thea.
Hur många år är Thea?*

De understrukna orden bearbetas sedan i klassen. Förslag på hur man kan bearbeta orden tillsammans med klassen förklaras senare under rubriken *Undervisning om Hjälpande ord*. Genom arbetet med *Hjälpande ord* kan eleverna öka sin förståelse för problemets sammanhang och vad uppgiften handlar om. Det gäller den språkliga förståelsen av texten och eventuella andra representationer (exempelvis bilder och figurer) och handlar om betydelsen av enskilda ord och bärande begrepp med eller utan matematisk koppling. I exemplet har de understrukna orden en tydlig matematisk koppling, men ord utan sådan koppling kan också behöva bearbetas. Eleverna behöver förstå alla ord för att kunna avgöra om de är kopplade till bärande begrepp eller helhetsförståelsen av problemet.

Ett viktigt inslag i undervisningen har varit att inte beakta de *hjälpande orden* utifrån deras isolerade betydelse. Eleverna har i stället tränats i att förstå orden utifrån problemets eller meningens

sammanhang samt begreppens roll i sammanhanget. Målet med *Hjälpande ord* är att eleverna ska komma igång. Från början kommer elever att vara osäkra på vilka ord de ska stryka under, men utfallet av detta val är inte det viktigaste. Huvudsaken är att de har en strategi för att komma igång och börjar resonera om vilka ord det kan vara och förståelsen av dessa ord. Det är värt att nämna att läraren inte behöver kommentera de "oviktiga" orden, upplevelsen är att det snarare kan hämma elever att inte våga ta ställning. I början av arbetet upplevde lärarna att vissa elever ville stryka under "så många ord som möjligt", fastän alla ord inte var betydelsebärande. Vår upplevelse är att elevernas förståelse för vilka de bärande begreppen är växer under tiden arbetet pågår. Strategin utvecklas genom träning och gemensamt arbete i klassen och allt eftersom eleverna arbetar med strategin så blir eleverna mer och mer säkra på vilka ord som verkligen har betydelse för problemen.

Representation

Undervisningsinslaget *Representation* syftar till att eleverna ska kunna representera problemets matematiska innehåll, med till exempel en bild, figur, symbol eller en tabell. Att välja och/eller konstruera lämpliga representationer är en nödvändig utgångspunkt för att eleven ska kunna förankra sitt matematiska resonemang i något som är både begripligt och användbart för att lösa problemet. I problemlösningens processens utforskningsfas undersöker eleven situationen i uppgiften och utforskar begrepp och samband. Genom inslaget *Representation* engageras eleverna just till i att söka samband, börja tänka om problemets delar och samband mellan dessa delar, för att på så sätt skapa förståelse för det matematiska innehållet i texten.

Framför allt får eleverna en strategi som hjälper dem att veta hur de ska påbörja denna utforskning. Genom att de redan valt ut de *Hjälpande orden* (som ska hjälpa dem förstå matematiken i problemet), så kan de nu ta sig an att söka lämpliga representationsformer för dessa ord. Det innebär att de kopplar det matematiska innehållet till något som de sedan tidigare har erfarenhet av eller förståelse för. I nedanstående exempeluppgift kan t.ex. elevernas erfarenheter från träslöjden bidra och hjälpa dem att översätta bräda, delar och sågning till en lämplig bild eller att de går för att hämta Cuisenaire-stavarna.

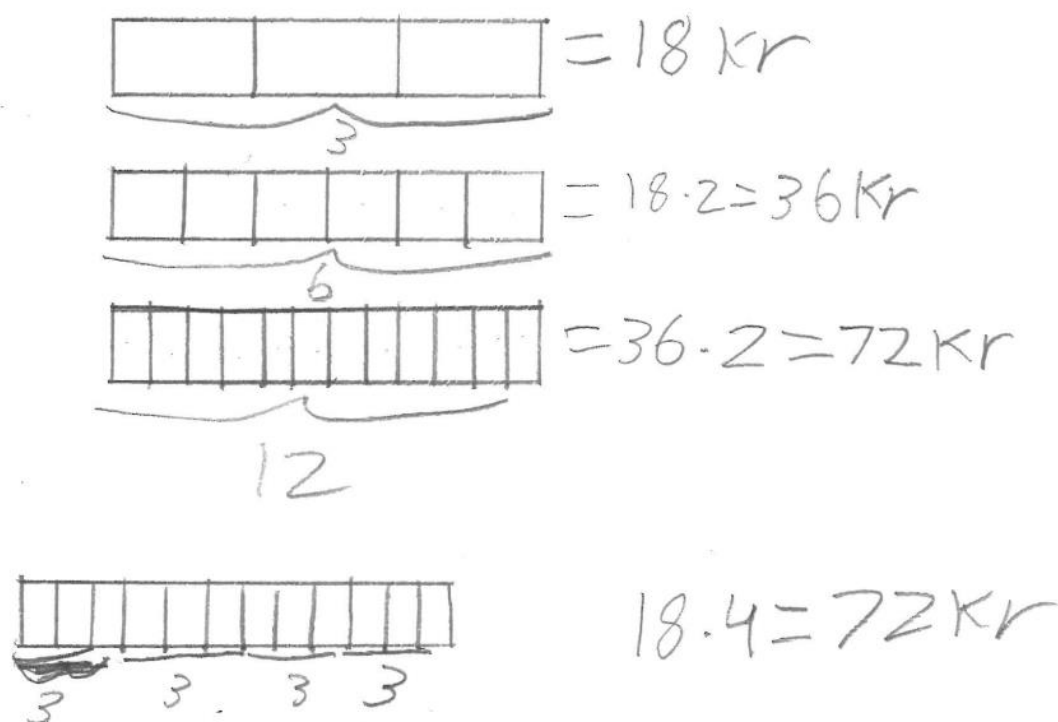
*På en brädgård får man betala per sågning om man vill ha en bräda delad.
Det kostar 18 kronor att få en bräda sågad i tre delar.
Hur mycket kostar det att få den sågad i tolv delar?*

Kanske använder de en rund symbol för att representera en enkrona, eller ett streck för enkelhetens skull. Förhoppningsvis har olika elever valt olika representationer. Genom att jämföra sina egna med andra elevers representationer kan eleverna se att det går att göra på flera sätt. Vissa representationer ligger närmare det konkreta innehållet och andra är mer abstrakta. Genom arbetet med *Representation* ökar elevernas kännedom om olika representationsformer och de får erfarenheter av att utforska samband mellan konkret och abstrakt innehåll. Eleverna kan också använda sig av samma representationer i olika matematiska sammanhang vilket kan stödja förståelsen att se samband mellan begrepp och innehåll.

Undervisningen ger eleverna strategier och möjlighet att testa olika representationer och reflektera över och själva välja den form som är mest lämplig i sammanhanget för att bättre kunna överblicka och förstå det matematiska innehållet i problemet. De tränar på att konkretisera, laborera och få ned någonting på sitt papper och lär sig att pendla mellan det konkreta och abstrakta innehållet. Genom att kommunicera sina representationer med andra elever erbjuds eleverna fler alternativ för att förstå samma matematiska innehåll.

I arbetet med representationer blev det tydligt för oss lärare att representationen behöver vara kopplad till texten och inte till lösningen av problemet. Eleverna ska representera textens innehåll

med hjälp av bilder eller symboler för att synliggöra det matematiska innehållet i texten. Representationerna blir alltså inte primärt en del av lösningen utan bygger på tolkningen av texten. Ett annat sätt att uttrycka det är att representationerna ska utgå från vad som är givet i uppgiften för att utgöra grund för utforskning som därefter kan leda till att skapa en lösningssidé. Om eleven istället börjar med en dåligt grundad lösningssidé och försöker representera den utan att ha förstått uppgiftens egenskaper, är risken stor att det blir fel. I exemplet med brädegården var det många elever som representerade bräddbitarna i stället för sågningarna. Som ni kan se på bilderna nedan ledde detta eleverna i fel riktning.



Att arbeta med modellen

När vi nu har introducerat modellens två övergripande delar vill vi dela med oss av våra erfarenheter av att omsätta dem i klassrummet. Vi blandar dessa erfarenheter med förklaringar till varför vi valde att göra på ett visst sätt. Varje lärare kommer alltid att behöva genomföra undervisningen på det sätt som passar den klass de för tillfället har och den lärare man känner sig bekväm med att vara. Det är viktigt att förstå målet med undervisningsinslaget, så att det huvudsakliga syftet (kärnan) finns kvar även vid de anpassningar läraren väljer att göra.

De två övergripande undervisningsinslagen bygger på varandra. Det innebär att läraren först under en period arbetar med inslaget *Hjälpande ord*, för att sedan lägga till inslaget *Representation*. Längden på varje period påverkas till exempel av klassens tidigare erfarenheter av att arbeta på liknande sätt eller det sociala klimatet i klassen. Exempelvis, så arbetade vi i snitt tre lektioner med att införa *Hjälpande ord* innan vi introducerade *Representation*. På den första lektionen var inriktningen att eleverna skulle förstå syftet och bekanta sig med undervisningen. Den andra och tredje lektionen var inriktningen att träna tillsammans. Vi upplevde det som gynnsamt om eleverna även parallellt tränade på strategierna på egen hand vid de övriga matematiklektionerna. För att underlätta sådan träning kan läraren hänvisa till det gemensamma arbetet. Till exempel, när en elev ber om hjälp när

hen inte förstår ett så kallat "lästal" i läromedlet, så kan läraren påminna om hur de tidigare arbetat med *Hjälpande ord* tillsammans.

Lärarna i projektet uppfattade att det var fördelaktigt att jobba med undervisningsinslagen på en utvald lektion, dvs. vid samma tidpunkt(er) återkommande varje vecka. Konkret skulle det kunna innebära att "på torsdag efter lunch är det alltid problemlösningslektion". Eleverna tar snabbt till sig "vad som gäller" dessa lektioner och vet då vad de kan förvänta sig. Lärarna upplevde också att det var fördelaktigt att, om det var möjligt, inledningsvis arbeta i halvklass. Samtidigt såg vi inga direkta hinder med att starta upp arbetet i helklass.

Målet med undervisningsmodellen är att få med sig alla eleverna i klassen att ta sig an matematiska problem. Det är viktigt att påminna sig om detta mål eftersom eleverna i andra sammanhang kan uppfatta att målet är att lösa uppgifter och komma fram till svar. Det är rimligt att eleverna då tar med sig den uppfattningen. Läraren behöver därför vara extra tydlig och konsekvent i sina signaler till eleverna att det i detta sammanhang (på dessa lektioner) inte handlar om att lösa uppgiften utan att *förstå och kunna ta sig an uppgiften*. Till exempel, i de fall där läraren efter att ha instruerat klassen och exempelvis behöver ge ytterligare stöd till en enskild elev är det viktigt att läraren konsekvent följer samma struktur: Börja med inslaget *Hjälpande ord* och stötta sedan *Representationen* av uppgiften. Exempel: När eleverna arbetade individuellt så sa en elev "jag kan inte/jag fattar inte" varpå läraren frågade om hen hade tagit ut de *hjälpande orden* i texten. Eleven svarade "nej, men jag kan göra det" och var sedan självgående och löste hela uppgiften. Vetskapen om att jag som elev inte behöver lösa uppgiften och leverera ett svar visade sig ha stor betydelse för eleverna. Denna vetskap gjorde att eleverna i allt större utsträckning valde att engagera sig i problemlösning.

I arbetet med modellens två delar ingår det att ta fram problem som är lämpliga för det aktuella undervisningsinslaget och anpassade till klassens behov. Eftersom syftet med lektionen inte är att lösa problemet utan att träna på strategier att ta sig an problemet är det bra att inte välja för svåra problem. Det kan vara lättare att ha en klassrumsdiskussion som handlar om innehållet i uppgiften om eleverna inte distraheras av att (misslyckas med att) skapa lösningssidéer. Att ta sig an problemet (tolka och utforska) och skapa en lösningssidé är olika faser inom problemlösningen. När eleverna till att börja med ska träna på det första bör de inte rusa iväg och försöka hitta dåligt grundade lösningssidéer. Lärarna erfor att uppgifterna, även om de var lätta, gav möjlighet till kreativitet och på så sätt kunde upplevas stimulerande av alla elever.

I arbetet ingår också att planera och strukturera lektionerna. Lärarna i projektet valde att arbeta enligt strukturen: Enskilt – Par – Alla (EPA). Lektionerna har varit 30–50 minuter långa. Lärarna provade att fördela tiden för enskilt arbete, pararbete och helklassdiskussion på lite olika sätt beroende på klassens behov och hur mycket tid som fanns till förfogande. I vissa fall fick eleverna tänka enskilt för att sedan direkt arbeta i helklass utan indelning i par. En viktig lärdom var att våga bryta det inledande arbetet i tid – trots att alla elever inte upplevde sig klara – till förmån för det sista steget, klassrumsdiskussionen.

Ett språkstärkande och socialt utvecklande arbete

Den sista övergripande erfarenhet som vi vill dela med oss gäller modellens språkstärkande funktion. Arbetet upplevdes särskilt hjälpsamt för elever med annat modersmål än svenska (SvA) och elever i andra språkliga svårigheter (t ex språkstörning), alltså elever i språklig sårbarhet. Lärarna upplevde arbetet som språkstödjande både direkt och indirekt genom att vara socialt stödjande. Korta inslag av pararbete med *olika* kamrater blir lärorikt ur ett socialt perspektiv utan att vara alltför krävande. Efter att ha arbetat ett år med att utveckla modellen upplevde alla lärare att det sociala klimatet i klassen

hade utvecklats. Fler elever bidrog i klassrumsdiskussioner, till och med utanför problemlösningsektionerna, och eleverna kunde dela med sig av konkreta tips på ett trevligt och konstruktivt sätt.

För läraren kan det vara viktigt att skilja mellan allmänna språksvårigheter och matematikspecifika språksvårigheter. Till exempel, i de fall ett matematiskt problem presenteras i text är den texten ofta informationstät med många betydelsebärande ord. Läsaren (eleven) behöver förstå informationen om de matematiska egenskaperna och definitionerna av de olika begreppen i texten. Exempelvis behöver eleven veta vad som karaktäriserar en kvadrat, till skillnad från när samma begrepp används i en skönlitterär text där de specifika matematiska egenskaperna inte är lika viktiga. På så sätt kan man skilja vardaglig och strikt förståelse för ett matematiskt ord.

Arbetet med *Hjälpande ord* blir en naturlig ingång för läraren att arbeta vidare med orden på ett sätt som språkmässigt stärker barnen. Frågan "Vad har du strukit under för ord?" blir en naturlig ingång i en diskussion med eleven, liksom "Är det något ord som du inte förstår?". I många klasser är det idag fler elever än tidigare som kämpar med språket och arbetet med *Hjälpande ord* kan göra att elever börjar göra något, de får en ingång i uppgiften och kan så småningom komma vidare. Läraren får även en ingång i stödet till eleven. Elever med svenska som andraspråk är ofta vana att fråga om specifika ord (tex vad "konsert" betyder), men de missar ofta de meningsbärande småorden (t ex "än" i "äldre än"). Dessa småord är svårare att som lärare förutspå och inse att eleverna inte förstår och missar. Man kan ha i minne att frågor såsom "hur tänkte du?" eller "varför gjorde du så?" kan upplevas hotande. Läraren kan omformulera meningar till "Berätta hur du tänkte?" eller "Kan du visa varför du gjorde så?" för att inbjuda eleven till att berätta om sina tankar om texten istället för att den upplever att den ska försvara sina val.

Elevernas förståelse för ordens betydelse provas i det följande undervisningsinslaget *Representation*. När eleverna ska representera de *hjälpande orden* kommer de att upptäcka de ord som de faktiskt inte förstått och försöka förstå dessa. Om man i exemplet nedan inte har förstått ordet "föregående" blir det omöjligt att representera problemet.

*Skol IF ordnar en stafett där varje lag består av fem elever. Varje elev springer 200 m längre än den föregående. Loppet är totalt 5 km.
Hur långt springer den femte eleven?
Svara i meter.*

Vi går nu in på genomförandet av varje undervisningsinslag för sig. Vi börjar med att repetera syftet med undervisningen eftersom det är viktigt att ha med sig denna förståelse vid de anpassningar som varje lärare behöver göra. Vi presenterar sedan förberedelsearbete, lektionernas genomförande och vidareutveckling av inslaget. Därefter presenteras kommentarer, specifika erfarenheter från klassrummet och varje del avslutas med en sammanfattning där våra erfarenheter kopplas till syftet med undervisningsinslaget. I slutet delar vi med oss av de positiva konsekvenserna som upplevts i klassrummet, samt utmaningar och förslag på att överkomma dessa.

Undervisning om Hjälpande ord

Syftet med *Hjälpande ord* är att eleverna ska veta *att* de kan och *hur* de kan ta sig an ett matematiskt problem. Genom arbetet med *Hjälpande ord* erbjuds eleverna en strategi som hjälper dem att ta ett första steg i att börja tolka uppgiften. Denna strategi kan de alltid starta med för att ta sig an och komma igång med uppgiften. Det första steget i strategin är att hitta och stryka under de ord och formuleringar som är bärande i uppgiften, dvs. ord, begrepp och formuleringar som är centrala för förståelse av problemet.

Uppgift 1

Julie, Hilde och Thea är tillsammans 43 år.

Hilde är tre år äldre än Julie och fyra år yngre än Thea.

Hur många år är Thea?

(Från Alseth m fl., 2017)

I detta exempel är det många ord med matematisk koppling som är centrala och som problemlösaren behöver förstå. Ordet "tillsammans" visar att flickornas åldrar slagits ihop. Begreppen "äldre" och "yngre" är vardagliga ord i en mening, men de har även en betydelse i matematisk mening. Frågan är alltid central i ett problem och i detta exempel behöver eleven förstå att det är antalet år på en av flickorna som utgör svaret, inte t ex. vem som är äldst. Till sist framstår alla tal som redovisas vara viktiga, vilket inte är fallet i alla matematiska problem.

Genom arbetet med *Hjälpande ord* kan eleverna lära sig att alla ord i texten inte är centrala för problemet. Till exempel finns vissa ord med av grammatiska skäl. Ibland är den inledande meningen inte viktig för det matematiska sammanhanget, medan ord i nästkommande meningar har stor betydelse för att eleven ska förstå den matematiska situationen.

I strategin *Hjälpande ord*, arbetar eleverna med en mening i taget, antingen enskilt eller i par. Genom att bearbeta texten mening för mening bromsas eleverna upp och de uppmärksammar varje ord i meningen för att avgöra vilka av dem som är bärande. Därefter sker det andra steget i strategin vilket innebär att läraren tillsammans med hela klassen diskuterar vilka ord eleverna har identifierat och därefter sker en diskussion om ordens betydelser och roll i sammanhanget. Målet är att eleven ska komma till insikt om vilka ord som skapar den matematiska situationen. Olikheter i elevernas idéer och tankar kan bidra till nya insikter, och läraren kan medvetet rikta elevernas uppmärksamhet på hur de *Hjälpande orden* och förståelsen av dem hjälper eleverna att förstå problemet i sin helhet. Målet är att elever ska lämna känslan av att "jag fattar ingenting", eftersom den känslan kan resultera i att "det är ingen idé att försöka".

Den fortsatta beskrivningen kommer att visa på hur lärare kan arbeta för att hjälpa eleverna att utveckla denna strategi. Vi kommer först att ta upp hur man kan introducera arbetet med *Hjälpande ord* i en klass som inte arbetat på detta sätt tidigare, och sedan hur man kan vidareutveckla arbetet.

Förberedelsearbete

Förberedelsearbetet består av att läraren:

- Väljer ett problem som passar elevgruppen.
- Skapar möjlighet att visa problemet via exempelvis projektor för helklassdiskussion.
- Skriver ut en kopia av problemet till varje elev.
- Förbereder sig själv på vilka ord som är bärande och hur de kan förklaras.

Lektionens genomförande

Lektionens genomförande följer nedanstående arbetsgång:

1. Läraren beskriver vad syftet med lektionen är och berättar att alla ord i en text inte har samma bärande funktion för förståelsen. Klassens uppgift under lektionen blir att identifiera och tillsammans beskriva vilka ord som är bärande för förståelsen för texten. Målet är att klassen ska tolka och förstå vad problemet handlar om, men inte att lösa problemet. Om

eleverna vill, kommer de att få lösa problemet senare, men lektionens syfte är inte att hitta lösningsmetod.

2. Läraren visar och läser problemet högt för klassen, eleverna har också en kopia utskrivet på varsitt papper för att senare kunna stryka under ord och göra egna anteckningar.
3. Tillsammans med klassen jobbar läraren med ordens betydelse, mening för mening. Börja med första meningen och låt eleverna hitta de *hjälpande orden*. Markera orden och diskutera dem gemensamt i klassen. Läs sedan upp nästa mening och följ samma mönster. Om läraren vill kan eleverna jobba enskilt eller i par med att identifiera orden för att sedan lyfta ordens betydelse i helklassdiskussioner.

Exempel på uppgifter att arbeta med

I dessa exempel har de ord som kan tänkas vara bärande för förståelse av problemet i uppgiften strukits under.

Uppgift 2

Sara står i kö för att köpa biljetter till en konsert.

Hon står på fjärde plats i kön framifrån och femte plats bakifrån räknat.

Hur många personer står i kön?

(Från Undvall m fl., 2020)

Uppgift 3

Rektangeln är dubbelt så lång som den är bred.

Omkretsen är 12 cm.

Vad är basen och höjden?

I arbetet med uppgift 1 ovan valde en elev att stryka under ordet "konsert". I diskussionen med klassen ställer läraren frågan: "Om vi hade jobbat med samma uppgift och det hade stått cirkus i stället för konsert – Hade det spelat någon roll?". Klassen kommer fram till att svaret är nej och läraren förklarar att ordet då inte behöver strykas under, eftersom det inte är avgörande för att förstå problemet. Eleverna får en erfarenhet av att avgöra om ett ord är bärande eller ej. De kan även förstå varför det är onödigt att stryka under ett ord som de inte ska jobba vidare med.

Lägg märke till att det handlar både om matematiska termer och ord som i sig inte har matematisk koppling men som är viktiga för att förstå matematiken i uppgiften. Ordet "kö" är ett exempel på ett bärande ord av den senare typen i uppgift 1. Orden "plats", "framifrån" och "bakifrån" går inte att förstå utan att först ha förstått ordet kö och dessa tre ord är i sin tur avgörande för att förstå problemet. "Fjärde" och "femte" är exempel på matematiska ord som eleven behöver förstå för att förstå uppgiften fullt ut. Frågan i uppgiften är oftast avgörande för problemet. I det här fallet är "Hur många" särskilt informativt i frågan för att förstå problemet.

Att kunna avgöra vilka tal som är relevanta och inte i en uppgift är viktigt, men ofta inte så lätt att avgöra. I uppgift 2 är alla talen (43, tre, fyra) relevanta, men så är inte alltid fallet. I en av klassrumsdiskussionerna stannade läraren upp eleverna och frågade "men vad betyder *äldre än* egentligen?" eftersom flera elever hade fastnat vid ordet "än". Eleverna fick försöka sammanfatta kärnan i orden varpå en elev beskriver hur "än" har med jämförelse att göra, t ex. när man jämför och visar på skillnader mellan olika antal. Eleverna tyckte de fick en bra förklaring och situationen bedömdes av läraren som fördelaktig både för att elever "tvingas" till att formulera sig och att eleverna lättare kan förstå varandra då de använder ett språk som passar kamraterna.

Val av uppgifter lämpliga till arbetet med Hjälpande ord

När man väljer denna typ av uppgift utgår man från att det ska finnas ett för eleverna känt sammanhang där ett eller flera matematiska begrepp ingår, exempelvis jämförelsebegrepp. Dessa (och eventuellt andra ord) stryks under, diskuteras och benämns "Hjälpande ord".

Ytterligare exempel:

Uppgift 4

Fabian var 62 år när Fredrik var 36 år.

Hur många år sedan är det som Fabian var exakt tre gånger så gammal som Fredrik?

(Svar: 23 år)

(Från Alseth m fl., 2017)

Uppgift 5

I klass 3b går 24 elever. På friluftsdagen väljer en tredjedel av eleverna att bowla. En fjärdedel väljer att spela tennis. Resten av eleverna väljer klättring.

Hur många elever väljer klättring?

Hur stor andel av eleverna väljer klättring?

(Svar: 10 st klättrar, andelen är 5/12)

Att vidareutveckla arbetet med Hjälpande ord

Efterhand lär sig eleverna att ord ibland behöver sättas ihop för att skapa mening, till exempel "mer än", att de *Hjälpande orden* inte har isolerade betydelser utan behöver förstås utifrån uppgiftens eller meningens sammanhang och framförallt att ord *kan* ha olika betydelse i olika sammanhang inom problemlösning i matematik. Jämför exemplen nedan:

Uppgift 6a

På Coop kostar en läsk 17 kr.

På Ica kostar en likadan läsk två kronor mindre.

Vad kostar en läsk på Ica?

Uppgift 6b

På Coop kostar en läsk 17 kr.

Den kostar två kronor mindre än en likadan på Ica.

Vad kostar en läsk på Ica?

Att låta eleverna jämföra två snarlika problem med varandra är ett sätt att uppmärksamma eleverna på sammanhangets och de enskilda ordens betydelse. Vi kallar detta för ett vidareutvecklat arbete med *Hjälpande ord*.

Förberedelsearbete

Förberedelsearbetet består av att läraren:

- Väljer två problem som kan jämföras och som passar elevgruppen.
- Skapar möjlighet att visa problemen via exempelvis projektor för helklassdiskussion.
- Skriver ut en kopia av problemen till varje elev.
- Förbereder sig själv på vilka ord som är bärande och hur de kan förklaras.

Lektionens genomförande

Följ först samma arbetsgång som tidigare (punkt 1–3 ovan). Arbeta med uppgift 6b på samma sätt och jämför sedan uppgift 6a med uppgift 6b (punkt 4–5 nedan). Jämförelsen är central för lektionens syfte, att tydliggöra att begrepp står i en kontext och därför inte har isolerade betydelser. Eleverna behöver få reda ut att orden kan skifta i betydelse utifrån grammatik och kontext.

1. Genomgång: Läraren beskriver vad syftet med lektionen är och berättar att alla ord i en text inte har samma bärande funktion för förståelsen samt att ord får betydelse av det sammanhang de står i. Klassens uppgift under lektionen blir att identifiera och tillsammans beskriva vilka ord som är bärande för förståelsen för texten genom att jämföra två problem. Målet är att klassen ska tolka och förstå vad problemen handlar om, men inte att lösa problemen. Om eleverna vill, kommer de att få lösa problemen senare, men lektionens syfte är inte att hitta lösningsmetod.
2. Läraren visar och läser första uppgiften högt för klassen, eleverna har också en kopia utskrivet på varsitt papper för att kunna stryka under ord och göra egna noteringar.
3. Tillsammans med klassen jobbar läraren med ordens betydelse, mening för mening. Börja med första meningen och låt eleverna hitta de *hjälpande orden* och - om läraren vill - vilka ord som är "onödiga". Markera orden och diskutera de gemensamt i klassen. Läs sedan upp nästa mening och följ därefter samma mönster som tidigare. Om läraren vill kan eleverna jobba enskilt eller i par med att identifiera orden för att sedan lyfta ordens betydelse i helklassdiskussioner.
4. Jobba med nästa uppgift på samma sätt.
5. Diskutera i helklass på vilket sätt problemen skiljer sig åt.

Kommentarer på genomförandet

I klassrumsdiskussionen är själva diskussionen och resonemanget centralt. Här påbjuds eleverna att formulera vilka likheter och skillnader uppgifterna har och vad det rent textuellt beror på. Eleverna ska uppleva att tanken är fri men syftet med arbetet är ändå att eleverna ska öva på att identifiera bärande begrepp och träna på att förstå vad likheter och olikheter i de båda matematiska situationerna beror på.

Frågan, som ofta kommer sist i uppgiften, behöver inte prioriteras så länge eleverna arbetar med att tolka den övriga texten i uppgiften. Detta eftersom de då kan lockas att fokusera på lösningsidé istället för att tolka all text som rör uppgiften. Om eleverna tycker att det är svårt att hålla sig till tolkning av problemet och hellre lägger fokus på att lösa problemet kan man som lärare radera själva frågan och presentera den efter det att eleverna tolkat alla de andra meningarna.

Val av uppgifter lämpliga till det vidareutvecklade arbetet med Hjälpande ord

När man väljer denna typ av uppgift utgår man från att snarlika formuleringar av problemen skapar olika situationer. Med andra ord, samma begrepp kan ha olika betydelse i olika formuleringar. Det är denna olikhet som uppmärksammas i det vidareutvecklade arbetet. Ytterligare exempel:

Uppgift 7a

Per och hans tre kompisar ska dela lika på 36 godisar.

Hur många godisar får var och en?

(Svar: 9 st.)

Uppgift 7b

Pers tre kompisar ska dela lika på 36 godisar.

Hur många godisar får var och en?

(Svar: 12 st.)

Erfarenheter från klassrumsarbetet

I följande text kommer vi att diskutera erfarenheter från att introducera undervisning om *Hjälpande ord* samt vidareutveckling genom att arbeta med jämförande uppgifter.

Det kan vara gynnsamt att i början av detta arbetssätt inte dela ut enskilda papper till eleverna. Det kan då bli lättare att samla eleverna till en gemensam diskussion, särskilt med tanke på de elever som arbetar snabbt. Om eleverna i detta tidiga skede har enskilda papper är det svårt att få eleverna att bara stryka under och stoppa där, de fokuserar ofta på att de ska lösa uppgiften. När elever har löst uppgiften kan det hända är att de inte engagerar sig i diskussionen för att de upplever att de "är klara". När eleverna lärt sig arbetssättet såg vi dock inga svårigheter med att eleverna noterade på sina egna papper.

När eleverna efterhand har förstått syftet med lektionen – att de enbart ska tolka uppgiften – kan man som lärare med fördel dela ut enskilda papper till eleverna. För eleven kan det bli lättare att jämföra och uppfatta skillnader mellan hur de själva gjort/tänkt och andra elevers sätt om de kan få stöd av sina egna anteckningar. Ur lärarens perspektiv kan det vara tidsbesparande att inte hantera papper, men samtidigt blir det svårare att bedöma och få en översikt över vilka elever som hamnat i en fallgrop.

Vi vill att alla elever, oavsett hur långt de kommit i lärandet, ska engagera sig i den gemensamma diskussionen för att skapa ett gemensamt lärandetillfälle. Upplevelsen är att eleverna inte alltid är medvetna om att det dom säger är hjälpsamt för andra elever då de t ex. svarar på en fråga. Därför bedömer vi att det var väldigt viktigt att förmedla syftet med lektionen till eleverna: att diskussionen är central för lärprocessen.

Vi var också eniga om att diskussionen om vilka ord som är bärande och vilka som inte är avgörande för att förstå sammanhanget är så pass viktig att diskussionen behövs även i de klasser där man arbetat med *Hjälpande ord* under en längre tid. De elever som kommit längre i sitt lärande får tillfälle att sammanfatta de *hjälpande ordens* betydelse och roll. De kan då befästa sin kunskap medan de elever som behöver ytterligare lärande får tillfälle att repetera innehållet.

När lärarna provade de jämförande uppgifterna i klassrummet var det flera av eleverna som först trodde att a- och b-uppgiften var desamma. Eleverna såg inte de små skillnaderna mellan uppgifterna som i slutändan fick stor påverkan för tolkningen. Då de båda uppgifterna jämfördes med varandra kunde lärarna hjälpa till att skapa en diskussion mellan eleverna om att det är lätt att göra fel om man inte läser noggrant och beaktar alla ord. För eleverna var det en nyttig erfarenhet att upptäcka att "jag gjorde faktiskt fel fast det var en så lätt uppgift" eller "17–2 är lätt, men jag gjorde fel i alla fall".

I diskussionen med eleverna och jämförelsen mellan uppgifterna kan läraren ställa reflektionsfrågor: "[Elev 1] har kommit fram till och [Elev 2] har kommit fram till (som är något annat än vad [Elev 1] kommit fram till). Hur tror ni att [Elev 1] och [Elev 2] har tänkt?", och/eller "Vilka ord tror ni att [Elev 1] och [Elev 2] hade strukit under?" Lärarens funktion är på så sätt att hjälpa till att synliggöra elevernas tankegångar för att de ska kunna bredda och fördjupa sitt matematiska resonemang kopplat till ordens betydelse och roll i sammanhanget.

I arbetet med eleverna är det viktigt att tänka på att syftet är att eleverna ska ha strategier för att ta sig an uppgiften. Målet är att eleverna ska lära sig identifiera viktiga/relevanta ord och begrepp som de sedan arbetar vidare med. Det innebär att kunna värdera ord, vilket också innebär att kunna välja bort de ord och begrepp som är mindre viktiga/relevanta för att förstå uppgiften. Detta syfte och mål gör att det inte är avgörande om elever väljer "fel ord", särskilt inte till en början. Det betyder inte att det är oviktigt vilka ord eleven väljer ut, men eleven behöver både uppmuntran och vägledning. Det viktiga är att eleven hittar tillräckligt bra *hjälpande ord* för att komma igång med en bra tolkning. Läraren behöver balansera dessa behov och anpassa sin feedback till olika elever. Pararbetet och helklassdiskussioner fungerar också som feedback till eleverna, dvs. eleverna kan uppleva både bekräftelse och utmaning då de jämför sina egna tankar med hur andra har tänkt. I början och för osäkra elever är det dock viktigt att eleverna får tillräcklig ledning så de förstår vad som menas med strategin att ta ut *Hjälpande ord*.

Som vi tidigare skrivit fram, uppfattade vi att det var betydligt vanligare att elever väljer ut "onödigt många" ord än att de missar ord. Vår erfarenhet är att eleverna lär sig av läraren och av varandra och inser att det är en fördel att bara välja och markera de nödvändiga orden, men att välja bort ord är förmodligen ett svårare moment än att välja ut ord. Det kan därför behövas lite mer tid och vägledning för detta moment. Diskussionerna kan också leda till att eleverna börjar känna igen olika typer av uppgifter, vilket gör att eleverna kan ta med sig erfarenheter i nya uppgifter.

En av lärarna hade möjlighet att parallellt introducera *Hjälpande ord* i en ny klass och vidareutveckla användningen i en annan klass. Läraren blev uppmärksam på en skillnad mellan dessa båda grupper. Elever som tidigare arbetat med *Hjälpande ord* valde i större utsträckning att lägga samman ord t.ex., "var och en", "dubbelt så lång", "hur många", "dela lika", och det var utan att läraren pratat om detta. Faktum är att betydelsen ofta blir tydligare när man sätter ihop orden till en helhet. Möjligen är det lättare för eleverna att börja med enskilda ord och att man sedan lär sig att lägga samman ord som tillsammans bildar en helhet med en särskild betydelse.

Sammanfattning

Åter tillbaka till målet med *Hjälpande ord*: Eleverna ska komma igång och kunna ta sig an matematiska problem. De ska veta att de har strategier för hur de kan börja. Ett första steg kan vara att titta på ett ord, sedan ser man till de andra orden och tar ytterligare steg mot att förstå helhet och sammanhang. Vissa elever behöver få möjlighet till att göra en sådan stegvis utveckling. De behöver få ett insteg för att börja med något överhuvudtaget, för att sedan stegvis ta sig vidare och då kan man som lärare tänka att det är okej och nödvändigt för dem att börja med de enskilda orden.

Om man tänker sig en översiktlig progression från att man bara ser enskilda ord – till att man ser delar som hänger ihop – till att man ser det hela sammanhanget, så bör man ha med sig att elever har kommit olika långt i denna process. Vissa elever behöver få guidning i att hitta ord i texten medan andra elever redan kan sätta orden i ett matematiskt sammanhang. Lärarna upplevde inte att det spelade någon stor roll att eleverna kommit olika långt i sin förmåga att tolka i det gemensamma arbetet. Oavsett var eleven är i sin lärprocess så får de tillfälle att utveckla sin matematiska förmåga genom diskussionerna antingen genom repetition eller fördjupning.

I det introducerande arbetet med *Hjälpande ord* har det påpekats att läraren *inte* ska signalera att uppgiften ska lösas. I det vidareutvecklade arbetet med elever som blivit vana med *Hjälpande ord*, valde vi att göra ett fränsteg från denna princip. Fortfarande är lösningen av problemet inte i fokus men uppgifternas olikheter synliggjordes tydligt när de uträknade svaren blev olika. Eleverna kunde då jämföra problemens *hjälpande ord* tillsammans med dess respektive lösningar.

Arbetet med Hjälpande ord - Möjligheter och positiva konsekvenser

I linje med målet med modellen upplevde vi att tröskeln för att komma in i problemlösningen verkar bli lägre genom undervisningsinslaget *Hjälpande ord*. En gemensam uppfattning var att elever – oavsett kunskapsnivå – kan vara delaktiga i gruppdiskussionerna, under förutsättning att fokus *inte* är att lösa uppgiften.

Arbetet med *Hjälpande ord* är språkstödjande. Vi har tidigare beskrivit fördelarna för både eleverna och för läraren som får en naturlig ingång för att ge stöd. Arbetet kan upplevas extra utmanande när det gäller elever med olika typer av språkliga sårbarheter och vid uppgifter med lite längre text. Då är det viktigt att påminna sig om att syftet med undervisningen som beskrivs i denna text är just att skapa möjlighet för alla elevers delaktighet. Elever med språklig sårbarhet hamnar ofta i lärandesvårigheter – syftet här är att underlätta för dem på ett sätt som fungerar i helklassammanhang.

Arbetet gör att alla elever kan vara delaktiga och det upplevdes mest gynnsamt för de elever som inte tycker de "fattar" matematik. De elever som är osäkra på sin egen förmåga kunde vara delaktiga i att identifiera de *hjälpande orden* och vara med i diskussionerna om dessa. Alla elever kan på så sätt få känna sig duktiga och deltagande, och undervisningen blir inkluderande.

Arbetet med *Hjälpande ord* kan även göra att eleverna kommer in i arbetet så att deras motivation ökar. De börjar tro på sig själv, ser värdet med det de gör och det känns roligare. Elevaktiviteten ökar och alla kan vara delaktiga i ett tidigt skede av lektionen. Vi upplevde ett högt engagemang hos eleverna. De ville hitta fler och fler ord och började reflektera över och använda matematiska ord när de pratade och fler elever blev dessutom motiverade till att ta sig an och lösa uppgiften. Eleverna uppskattade och tyckte att det var roligt när alla ville bidra med förslag och förklaringar. De visade att de ville göra varandra delaktiga och att kamraterna skulle förstå.

Vi lade också märke till att allt fler elever börjar komma ihåg att de ska börja med de strategier de fått genom arbetet med *Hjälpande ord* då de kör fast. Strategierna gör att eleverna stannar upp och tänker efter "Vad är det som är viktigt i texten?", och elevernas möjligheter att ta sig an problemet ökar. Arbetssättet stärker alltså elevernas förmåga att reflektera över sitt tolkningsförsök, vilket är en avgörande förmåga för att bli en bra problemlösare i matematik.

En annan fördel med arbetet med *Hjälpande ord* är att läraren kan hänvisa tillbaka till det gemensamma arbetet i det fall en enskild elev behöver ytterligare stöd för att ta sig an uppgiften. Trots att elevernas delaktighet och engagemang underlättas betyder det inte att alla elever direkt vill och kan ta sig an uppgiften. Det kan ta olika lång tid och te sig olika för enskilda elever. Lärarna menade att de nu uppmuntrar och stöttar den enskilde eleven på ett annorlunda sätt jämfört med

innan projektet genom att påminna eleven vad de gjorde i helklassarbetet. Om en elev inte tar sig an problemet och till exempel säger, "Jag förstår ingenting", kan läraren hänvisa tillbaka till hur de arbetade i klassen och uppmuntra eleven att göra på samma sätt själv. Flera lärare säger att de tidigare i sådana situationer ofta började vägleda eleven i lösningen av problemet. De stöttade inte eleven till att på egen hand ta sig an uppgiften. Eleven får nu behålla initiativet och får en strategi för och träning i att självständigt ta sig an matematiska problem. För en del elever faller sig detta naturligt, medan andra elever behöver den återkommande träningen för att nå automatik. Arbetet med *Hjälpande ord* gör strategierna tillgängliga för alla elever och användningen av dem blir en del av matematiken.

Vi har upplevt att eleverna blev alltmer vana vid att använda strategierna och allt oftare självmant började ta fram de bärande orden på egen hand och tror att det konsekventa och återkommande arbetet med *Hjälpande ord* är orsaken till förändringen. Det finns till och med exempel på elever som påminde läraren om att de måste gemensamt gå igenom de hjälpande orden som en del av problemlösningsförfarandet, vilket visar på att arbetet uppfattats som meningsfullt från elevens perspektiv.

Arbetet med Hjälpande ord - Utmaningar och lösningar

I arbetet med *Hjälpande ord* är det fördelaktigt om eleverna vågar fråga om de inte förstår vad ett ord betyder, men att ställa en fråga kan avslöja att man inte förstår vilket kan göra att man känner sig dum och dålig. Det är därför långt ifrån självklart att alla elever vågar fråga. Särskilt i början, innan eleverna erfarit och förstått fördelarna med *Hjälpande ord* behöver läraren ha strategier för att hantera det sociala samspelet i klassen.

Ett exempel på en sådan strategi är att läraren kan visa på vad en elev som frågat faktiskt klarat av och visat vad den behöver veta. Om en elev frågar – trots att det känns pinsamt – vad en rektangel är, så kan läraren lyfta fram att eleven lyckades avgöra vad som var ett bärande ord och att den faktiskt förstått att det är viktigt att förstå ordet. Sedan kan läraren diskutera vad en rektangel är.

Läraren behöver även strategier för att hantera när elever ifrågasätter kamraternas förklaringar av ord och begrepp. En elev som ifrågasätter en kamrats förklaring visar ett engagemang och aktivt tänkande om begreppens betydelse och roll, något vi vill att de ska göra. Samtidigt behöver eleverna få lära sig och träna på lämpliga sätt att ställa frågor och ge varandra feedback. När en elev säger "...då har jag tänkt fel" så kan läraren vända detta till något positivt, och visa på att klassen har fått ett tillfälle att lära sig något nytt.

I helklassdiskussionen är det en balansgång mellan att bekräfta alla elevers bidrag och att visa på skillnader i kvalitet och relevans. Det är viktigt att eleverna upplever att deras bidrag är betydelsefullt. Att ha gjort ansträngningen att tänka till ska upplevas som tillräckligt bra bidrag. Mer generellt är det värdefullt om eleverna inser att det hör till matematisk problemlösning att ibland göra fel. Enda sättet att undvika fel är att alltid veta i förväg vad som ska göras, men då är det inte problemlösning. Och det är bättre att göra fel – och lära sig något av det – än att inte göra något alls för att en är osäker.

En generell utmaning med arbetet med *Hjälpande ord* är att det tar tid. Lärare känner ofta att det är mycket som behöver hinnas med under de lektioner i matematik som står till förfogande under ett läsår. Läraren behöver därför tro på att arbetet med att tolka och förstå problem lönar sig i längden. Eftersom helklassdiskussionerna är centrala för elevernas lärande så är det viktigt att det finns tid för dem. Om lektionstiden blir för knapp är vår erfarenhet att det går lika bra att förflytta en diskussion till nästkommande lektion. Detsamma gäller om man upplever att klassen har tappat fokus. Då kan det vara bättre att avbryta och fortsätta vid ett annat tillfälle.

Till sist, en fallgrop i arbetet med *Hjälpande ord* är en förväxling med andra arbetssätt som innebär att eleverna ska söka "signalord" (även andra benämningar förekommer) som leder till att ordens betydelser kopplas till en särskild metod eller ett särskilt räknesätt. Se t ex uppgift 4a och 4b ovan som med en ytlig tolkning av signalord leder till samma lösningsmetod, vilket är fel. Arbetet med *Hjälpande ord* är *inte* ett arbete med isolerade betydelser där eleverna uppmanas att identifiera ord som hjälper dem att välja metod för att lösa uppgiften. Att tolka orden på detta sätt saknar matematisk mening och ger ytliga ledtrådar som är effektiva och hjälper på kort sikt, men som på längre sikt kan vara skadliga för elevens matematikutveckling. Arbetet med *Hjälpande ord* syftar inte till att hjälpa eleverna att välja lösningsmetod, utan att eleverna ska få strategier för att förstå den matematiska situationen och förstå sammanhanget.

Som exempel behöver inte "sammanlagt" betyda att något ska adderas, men det kan däremot vara en väg in att förstå den matematiska situationen. I jämförelse med läsning i andra sammanhang skulle identifiering av signalord betraktas som sökläsning, medan identifiering av *hjälpande ord* främjar att eleverna gör inferenser (läser mellan raderna och drar slutsatser). Till exempel vill vi att eleverna ska förstå att det finns ett förhållande mellan två objekt när de möter "mindre än" och sedan fundera på vad relationen/förhållandet är. Vi vill inte att de ska tänka "Då ska jag använda subtraktion".

I arbetet med *Hjälpande ord* får eleverna ingång till att förstå problemet, de får förutsättningar för att skapa en inre bild av det. Det hjälper dem att i nästa steg kunna välja en representation för den matematiska situationen.

Undervisning om Representation

Genom arbetet med *Hjälpande ord* får eleverna strategier för första steget att ta sig an och förstå problemet. Undervisningsinslaget *Representation* ger dem strategier för att ta nästa steg. Detta steg innebär en fördjupad tolkning och utforskning av vilka matematiska idéer som problemet handlar om. Syftet är att kunna omsätta innehållet i uppgiften till användbara representationer, eller med andra ord att hitta representationer av begrepp och/eller samband. Idén med inslaget *Representation* är att eleverna ska veta att de kan börja med att hitta representationer för de *hjälpande orden* i texten. Det fortsatta gemensamma arbetet gör att eleverna kan få idéer om alternativa representationer och de kan jämföra och värdera representationer som fungerar bättre och sämre. I exemplet med sågningen av brädan var en möjlig representation att skapa en bild, en annan att använda sig av Cuisenaire-stavar.

Uppgift 8

På en brädgård får man betala per sågning om man vill ha en bräda delad.

Det kostar 18 kronor att få en bräda sågad i tre delar.

Hur mycket kostar det att få den sågad i tolv delar?

(Från Undvall m fl., 2020)

När eleverna jämför dessa två representationer skulle de kunna komma fram till att en elevbild är mer lämplig eftersom brädan i sin helhet blir tydligare i en bild i jämförelse med att lägga ut tre stavar som representerar varje avsågad del. Att elever får se varandras representationer kan också bidra till att deras egna föreställningar av det matematiska innehållet breddas eller fördjupas eftersom representationerna kompletterar varandra.

Eftersom det i utforskningen ingår att man inte alltid i förväg vet vad som kommer att fungera eller inte fungera, så kan läraren behöva hjälpa eleven att inse att provandet är en naturlig del i problemlösning och en viktig del i lärandet. Så småningom lär sig eleverna att på egen hand "bena ut uppgiften", vilket är något som elever ofta ber läraren om hjälp med. Representationen, t ex en bild,

hjälper till att kunna se och förstå problemets delar och helhet. Ord och begrepp får en betydelse i matematisk mening.

Återigen går vi in på det konkreta arbetet i klassrummet. Vi beskriver förberedelsearbete, lektionernas genomförande inklusive kommentarer, erfarenheter från klassrummet, sammanfattning med koppling till syftet, positiva konsekvenserna, samt utmaningar och lösningar.

Förberedelsearbete

Förberedelsearbetet består av att läraren:

- väljer ett problem som passar elevgruppen.
- skapar möjlighet att visa problemet via exempelvis projektor för helklassdiskussion.
- skriver ut en kopia av problemet till varje elev.
- plockar fram eventuellt laborativt material
- förbereder sig själv på hur det matematiska innehållet kan representeras på olika sätt, exempelvis genom att lösa uppgiften själv och reflektera över lösningen.

Lektionernas genomförande:

Lektionens genomförande innehåller följande moment:

1. Läraren beskriver vad syftet med lektionen är och berättar att texten i problemet kan representeras med hjälp av exempelvis laborativt material eller bilder som eleverna ritar själva. Klassens uppgift under lektionen blir att representera orden som är bärande för förståelsen för texten. Målet är att klassen genom sina representationer ska få en fördjupad bild av vad problemet handlar om, men inte att lösa problemet. Om eleverna vill, kommer de att få lösa problemet senare, men lektionens syfte är inte att hitta lösningsmetod.
2. Läraren visar och läser problemet högt för klassen, eleverna har också en kopia utskrivet på varsitt papper.
3. Eleverna stryker under de *hjälpande orden* på sina egna kopior.
4. Efter en kort stund, lyft de *hjälpande orden* gemensamt enligt föregående lektioners genomförande med *Hjälpande ord*.
5. Be eleverna skapa representationer av de *hjälpande orden*. De kan antingen rita en bild eller använda sig av laborativt material.
6. Någon elev får visa sin representation på tavlan med exempelvis en dokumentkamera. Läraren frågar om någon representerat uppgiften på ett annat sätt. Om det finns flera representationer visas de på samma sätt och läraren hjälper eleverna att hitta likheter och skillnader mellan de olika förslagen. På samma sätt kopplas representationer av elever som gått direkt till symbolspråk till de andra elevernas representationer.

Kommentarer på genomförandet

Medan arbetet med *Hjälpande ord* fungerade relativt direkt, upplevde vi att detta undervisningsinslag krävde mer planering och reflektion innan det kunde fungera. Vi upptäckte att det spelade roll hur eleverna introducerades till att skapa representation för det matematiska innehållet i problemet. Det är viktigt att eleverna förstår att det är de *hjälpande orden* som ska representeras för att kunna utforska matematiken i problemet. Vår upplevelse var att eleverna annars försökte skapa en lösningsidé med hjälp av representationer, vilket inte är syftet med undervisningsinslaget. När läraren kommer fram till punkt 5 behöver instruktionen till eleverna därför vara tydlig: *Det är de hjälpande orden som ska representeras, inget annat.*

Eleverna kan med fördel arbeta med representationer på samma sätt som de gjort med de *hjälpande orden*, alltså att ta mening för mening för att säkerställa att de representerat samtliga *hjälpande ord*. Vissa ord kommer att samlas i samma representation, vilket betyder att det inte behövs en representation per ord. Om eleverna förstår hur de *hjälpande orden* logiskt hålls samman i samma representation bör man som lärare uppmuntra detta. Exempelvis kan en elev rita kryss i olika cirklar där kryssen representerar bollar och cirklarna representerar kartonger. Denna representation visar på att eleven förstått att det kommer att finnas ett visst antal kartonger som ska fyllas med bollar trots att eleven varken ritat bollar eller kartonger.

Val av uppgifter lämpliga till arbetet med Representation

När man väljer denna typ av uppgift utgår man från att det finns något som behöver representeras för att skapa en fördjupad förståelse av sammanhanget och att representationen inte automatiskt löser problemet. Ytterligare exempel:

Uppgift 9

*Ida och Noel ska dela en pizza som väger 360 g.
Den ena delen ska vara dubbelt så stor som den andra.
Hur många gram väger den stora delen?
(Svar: 240g)*

Uppgift 10

*Det finns 10 olika djur i en hage. Det är dubbelt så många får som kor. Det finns lika många hästar som får.
Hur många finns det av varje djur?
(Svar: Får = 4st, Kor = 2st, Hästar = 4st)*

Uppgift 11

*En gräsmatta är 24 meter lång och 15 meter bred. Runt gräsmattan ska man sätta upp ett staket. Avståndet mellan stolparna ska vara 3 meter.
Hur många stolpar går det åt?
(Svar: 25 stolpar)*

(Från Undvall m fl., 2019)

Uppgift 12

*Wilma och Mika åker hiss i ett höghus. De åker först upp fem våningar, sedan ner sju våningar och till slut upp nio våningar.
Hissen har då stannat på tolfte våningen.
På vilken våning startade Wilma och Mika?
(Svar: Femte våningen)*

(Från Undvall m fl., 2020)

Erfarenheter från klassrumsarbetet

Arbetet med *Representation* upplevdes som en länk mellan tolkning och utforskning, utan att komma in på lösningen av uppgiften. Arbetet med att mening för mening rita/anteckna på papperet för att "bena ut" uppgiften kan skapa en förståelse för dess delar och helhet. Läraren kan behöva påminna eleverna om detta stegvisa förfarande och även att det är de understrukna orden som eleverna ska representera.

En oväntad och intressant erfarenhet var att elever som inte kommit lika långt i sin matematikutveckling många gånger gjorde tydligare representationer och hade lättare att beskriva hur de tänker jämfört med de eleverna som generellt har större kunskaper i matematik. En möjlig förklaring är att de sistnämnda eleverna upplever att de har en tydlig lösningssidé innan de hunnit reflektera över hela problemets innehåll. De kan ha gjort en ytlig tolkning som kan leda fel. De kan också tycka att det tar för lång tid att göra en representation och går därför direkt på svaret utan att göra en ordentlig utforskning av problemet. Lärarna uppfattade att dessa elever ibland missar viktiga delar (ord) av texten och har svårare att beskriva alla steg, något som alla elever så småningom behöver kunna. Vid uppgift 7 (Brädgården) var det flera elever som direkt påbörjade lösningar med hjälp av matematikens symbolspråk och sedan kom in på villospår utan att själva märka det. Flera missade att ta hänsyn till plankan i sin helhet. Eleverna fokuserade i stället på bitarna som bygger upp plankan, inte på att plankan ska delas.

Sammanfattning

I arbetet med de *hjälpande orden* upplevde lärarna att många elever hade fått verktyg för att ta sig an problem genom att tolka texten. Dock saknade de strategier för att utforska matematiken som symboliseras med hjälp av orden. Utifrån det skapades ett undervisningsinslag där eleverna får representera de *hjälpande orden* med hjälp av ex. bilder, tabeller eller laborativt material.

Genom det gemensamma klassrumsarbetet lär sig eleverna strategier för att både kunna tolka och utforska problemens matematik. Dessa strategier kan sedan eleverna använda sig av i det enskilda arbetet framgent. Om eleverna fastnar och vill ha hjälp kan läraren påminna eleven om strategierna istället för att hjälpa eleven med att förstå uppgiften.

Arbetet med Representation - Möjligheter och positiva konsekvenser

Även i utforskningsfasen upplevde lärarna att eleverna var mer avslappnade och upplevdes mindre pressade tack vare inriktningen på att ta sig an problem, inte att lösa uppgiften. Undervisningsinslaget *Representation* fungerade som ett sätt att "dra in eleverna i uppgiften", att få dem att vilja och börja försöka utforska matematiken i uppgiften.

Andra positiva upplevelser var att "eleverna leker med talen" för att ta sig vidare. Även om det inte alltid blir rätt så gör eleverna något, vilket är bättre än att de inte är aktiva alls. Upplevelsen var också att eleverna fortsätter att tycka att det är kul på dessa lektioner. I arbetet med *Representation* kan eleverna börja på en konkretionsnivå som passar dem. En elev kan behöva rita de hundar som beskrivs i uppgiften för att förstå vad som efterfrågas, medan en annan elev kan hoppa direkt till att representera varje hund med ett streck.

Målet är att eleverna på egen hand kan "bena ut uppgiften", vilket är något som elever ofta ber läraren om hjälp med. Det handlar om att kunna omsätta innehållet i problemet till en användbar representation, att hitta representationer för begrepp och/eller samband. Här framstår också den psykologiska effekten av arbetet som viktig. Eleven kan övervinna känslan av att det är överväldigande svårt med vetskapen om att det finns något enkelt som är jag kan börja med och som jag kommer att klara av. I en grupp elever i neuropsykiatriska svårigheter fanns elever som vägrade att ta sig an uppgifter för att de innehöll alldeles för mycket text. Undervisningsinslaget gjorde att eleverna började betrakta problemlösning som en stegvis process där du alltid behöver ta ett första steg, nämligen att tolka uppgiften. Synen på problemlösning som "antingen-eller", "svart-eller-vitt" eller "jag kan-jag kan inte" suddades ut.

När elever vågar försöka kan det leda till lärande och utveckling av förmågor. Elevens kreativitet stärks genom att prova nya saker. Reflektionsförmågan stärks då eleven själv bedömer om hens utforskning leder framåt eller inte, och elevens syn på matematik och sig själv som problemlösare stärks då eleven erfar att hens egna initiativ är värdefulla även om allt inte är rätt från början. Med andra ord, eleven litar på sitt eget matematiska resonemang. Elevens kreativitet, reflektionsförmåga och matematiska auktoritet utvecklas på sikt. Träning och det gemensamma lärandet stärker eleverna, men det bygger på att eleverna har en strategi för hur de kan börja utforska.

Arbetet med *Representation* upplevdes också positivt ur lärarens perspektiv. Även här får läraren en naturlig ingång till att ställa frågor kopplat till uppgiftens ord och dess betydelse, till exempel: "Vad kostar en sågning?". Läraren kan också hjälpa eleverna att jämföra varandras representationer och uppmärksamma hur representationerna relaterar till de *hjälpande orden*. En annan fördel som lyftes fram är att helklassarbetet stärker många elevers självständiga arbete, vilket leder till att läraren har tid att hjälpa enskilda elever som har fortsatta behov.

En slutsats i arbetet med *Representation* var att elevers olika kunskapsnivåer spelar mindre roll när målet inte är att lösa problemet. Arbetet är inriktat på att få med de elever som tidigare inte velat eller kunnat ta sig an uppgifter, men även de andra eleverna får strategier som de kan använda t ex. vid svårare problemlösning.

Det gemensamma lärandet i klassrummet lyfts till en högre nivå och eleverna visar att de vill vara delaktiga och skapa lärande för sina kamrater. Det har att göra med att man arbetar med matematiken tillsammans. Eleverna blir inriktade på att berätta och visa, men utan fokus på att lösa uppgiften. Det är positivt på det sättet att eleverna visar att de vill förstå och risken för att de inte ska våga minskar.

En aspekt i det gemensamma lärandet som lyftes fram var kommentarer från elever där de uttryckte att "det här har vi gjort på ett liknande sätt i tidigare uppgifter". Det är en styrka när elever upptäcker att typen av problem återkommer. Det visar att de jämför uppgifter på en djupare nivå, t ex.: "men det blir alltid en mindre när man klipper". Eleverna går från en ytlig till en djupare mer reflekterad användning av sina erfarenheter. Lärarna upplevde att allt fler elever kom med sådana kommentarer.

Arbetet med Representation - Utmaningar och lösningar

När lärarna diskuterade erfarenheter av arbetet med *Representation* blev det tydligt att utfallet i klasserna blivit väldigt olika. I vissa klasser började många elever med att rita en bild för att sedan använda sig av siffror (symboler). I en klass var spridningen stor gällande vilken representation eleverna använt, medan eleverna i en annan klass i princip hade representerat matematiken på samma sätt. Vi kunde inte riktigt förstå orsakerna till skillnaderna, men oförutsägbarheten gör det svårare att planera och hantera undervisningen. Som lärare behöver man därför vara beredd på att komplettera med fler förslag om elevernas representationer liknar varandra.

Nästa utmaning gäller målet med undervisningen. Om än läraren medvetet och tydligt signalerar att fokus ligger på att ta sig an problem, kan det uppstå situationer där eleverna oplanerat leds in mot lösningen av uppgiften. Ett exempel var när läraren innan det att eleverna skulle påbörja det enskilda arbetet (EPA) ställde frågan "Har ni några frågor?", varpå en elev frågar "Får man använda tabeller?" dvs. en lösningsidé. Konsekvensen blev att många av de andra eleverna direkt påbörjade en tabell, vilket innebar att eleverna hoppade över en egen fördjupad tolkning och utforskning. Den gemensamma jämförelsen i par (EPA) blev också mindre intressant eftersom många elever gjort på samma sätt. Som lärare kan man kanske undvika detta genom att vara mer specifik när man kontrollerar att eleverna vet vad de ska göra istället för att ställa en öppen fråga till klassen.

Skillnaden mellan lärares och elevers syn på mål gör sig också påmind vid prov. Trots att klassen arbetat med inriktning på tolkning och utforskning stora delar av läsåret "återföll" elever till att säga "Jag kan inte" i provsammanhang. Läraren kan då behöva påminna extra om arbetet med *Hjälpande Ord*. En annan idé som dök upp var att utnyttja tillfället till att förklara att strategierna de tränat på kan hjälpa dem att få de första poängen till exempel på Nationella Prov. Bedömningskriterierna blir tydligare för eleverna.

Möjligheter att lära sig av misstag är inte självklart en uppskattad möjlighet ur elevernas perspektiv. Ett misstag som flera elever gjorde i detta sammanhang var att oreflekterat använda sig av en metod som hade fungerat tidigare. Till exempel, förlitade de sig på proportionalitet i uppgift 7 (Brädgården) och gjorde därmed beräkningen $4 \times 18 \text{kr}$. Lärarna uppfattade att eleverna gjorde en jämförelse av denna uppgift och tidigare uppgift(er) på en ytlig nivå. Utmaningen blir att hjälpa eleverna att bli varse denna fallgrop och att inse att de behöver göra en noggrannare jämförelse, dvs. att lära sig av sitt misstag. Det är viktigt att man som lärare väljer att se detta misstag som något klassen gemensamt kan lära sig av. En generell missuppfattning kan fångas upp genom att nästkommande lektion diskutera vad uppgiften egentligen efterfrågade, exempelvis genom att fråga eleverna hur de representerat ordet "sågning" i sina bilder. Läraren kan då poängtera skillnaden mellan "sågning" och "del". En annan möjlig väg är att välja två problem där den ytliga metoden fungerar för den ena, men inte den andra.

Ytterligare en utmaning är kopplad till helklassdiskussionen (EPA). När eleverna skulle identifiera likheter och skillnader i representationer var det vanligt att eleverna jämför det konkreta (Ex: han har ritat bollar och jag apor) i stället för hur det matematiska innehållet representerats. För att hjälpa eleverna med denna avancerade uppgift behöver läraren leda och hjälpa till att fördjupa diskussionen. Samtidigt som olikheterna mellan eleverna blir en tillgång då eleverna kan lära sig av varandra, behöver läraren vara förberedd på att hantera olikheter i förståelse och snabbhet i klassrummet.

Slutsatser

En mycket glädjande slutsats med detta projekt är att lusten att arbeta med problemlösning har ökat i alla klasser. Eleverna tycker sig kunna åtminstone litegrann, vilket gör att de har lättare att också fortsätta sitt arbete med uppgiften. Eleverna tränas också i att våga diskutera tillsammans vilket har gjort att klimatet i klassen har blivit mer tillåtande och positivt. Den språkstärkande aspekten av modellen blev alltmer framträdande under projektets gång. Vi märkte att många elever som brottas med språkets betydelse äntligen fick strategier att kunna arbeta självständigt i det inledande arbetet. Dessa elever kommer att behöva hjälp av läraren även fortsättningsvis, men alla elever behöver inte hjälp samtidigt när de kan starta upp uppgiften själv.

I och med att vi lärare ser att många av eleverna använder sig av strategierna när de arbetar individuellt drar vi slutsatsen att de känner att de är hjälpta av dem. Istället för att hjälpa eleven med själva lösningsmetoden i uppgiften kan läraren påminna om strategierna. Det gör att eleven får fortsätta att jobba vidare på egen hand med ett eget resonemang istället för att få vägledning och ledtrådar av läraren. Detta stärker på sikt elevens matematiska auktoritet och självförtroende.

Referenser

Alseth, B., Nordberg, G., & Røsseland, M. (2017). *Pixel Matematik 4 - 6 Problemlösning*. NoK

Lithner, J., Säfström, A. I., Palmberg, B., Sidenvall, J., Granberg, C., Andersson, C., Boström, E., & Palm, T. (2025). *En lärarguide för att stödja elevers problemlösning* (UmU Reports in STEM Education 2025:1). Umeå universitet.

https://www.umu.se/globalassets/organisation/fakulteter/teknat/institutionen-for-naturvetenskapernas-och-matematikens-didaktik/ursteme/URSTEME_2025_1.pdf

Undvall, L., Melin, C., Johnson, K., Welén, C., & Dahlin, K. (2019). *Matematik Alfa Grundbok*. Liber.

Undvall, L., Melin, C., Johnson, K., Welén, C., & Dahlin, K. (2020). *Matematik Beta Grundbok*. Liber.

Ytterligare källor med uppgifter

Utöver ovanstående källor har vi använt oss av uppgifter från dessa källor:

Chapovalova, V. (2023). *Populära problem*. Liber.

Hagland, K., Sundberg, M., & Hårskog, A. (2024). *Problembank för åk 4–6*. Skolverket.

<https://larportalen.skolverket.se>

Lindberg, D., & Christiansen, C. (2018). *Singaporemetoden - Blockmodellen*. Askunge.

NCM (2024). *Taluppfattning med känguruproblem - Problem för grundskolan*.

<https://ncm.gu.se/2024/12/antligen-har-taluppfattning-med-kanguruproblem-for-grundskolan/>

UmU Reports in STEM Education

- 2025:1 Lithner, Johan, Säfström, Anna Ida, Palmberg, Björn, Sidenvall, Johan, Granberg, Carina, Andersson, Catarina, Boström, Erika & Palm, Torulf. *En lärarguide för att stödja elevers problemlösning*. ISBN 978-91-8070-585-1
- 2025:2 Lithner, Johan, Säfström, Anna Ida, Palmberg, Björn, Sidenvall, Johan, Granberg, Carina, Andersson, Catarina, Boström, Erika & Palm, Torulf. *A teacher guide for supporting students' problem solving*. ISBN 978-91-8070-675-9
- 2025:3 Säfström, Anna Ida. *Fyra metaforer för tal*. ISBN 978-91-8070-881-4
- 2026:1 Sundberg, Andrea, Modig, Anna, Samuelsson, Anna, Andersson, Catarina, Lithner, Johan, Sjölund, Ulrika & Tängdén, Veronika. *En modell för hur lärare kan arbeta för att alla elever ska kunna ta sig an matematiska problem*. ISBN 978-91-8070-924-8

