Kan man räkna ut allt? Gödels ofullständighetssats och självreferenser

Lars–Daniel Öhman

Kunskapsveckan 2022, Umeå universitet

1 november 2022

Tvärtomspråket

Tvärtomspråket

"Just nu pratar jag på tvärtomspråket"

Tvärtomspråket

"Just nu pratar jag på tvärtomspråket"

Var det jag sade just nu sant?

Tvärtomspråket

"Just nu pratar jag på tvärtomspråket"

Var det jag sade just nu sant?

Om det var *sant*, så pratade jag på tvärtomspråket, och då menade jag i själva verket motsatsen, alltså att jag *inte* pratade på tvärtomspråket.

Tvärtomspråket

"Just nu pratar jag på tvärtomspråket"

Var det jag sade just nu sant?

Om det var *sant*, så pratade jag på tvärtomspråket, och då menade jag i själva verket motsatsen, alltså att jag *inte* pratade på tvärtomspråket.

Om det var *falskt*, så pratade jag *inte* på tvärtomspråket, men då menade jag faktiskt det jag sade, alltså att jag faktiskt pratade på tvärtomspråket.

Tvärtomspråket

"Just nu pratar jag på tvärtomspråket"

Var det jag sade just nu sant?

Om det var *sant*, så pratade jag på tvärtomspråket, och då menade jag i själva verket motsatsen, alltså att jag *inte* pratade på tvärtomspråket.

Om det var *falskt*, så pratade jag *inte* på tvärtomspråket, men då menade jag faktiskt det jag sade, alltså att jag faktiskt pratade på tvärtomspråket.

Det verkar alltså som att det inte går så bra att säga om detta är sant eller inte.

Lite mer strikt: Barberaren i Sevilla

Lite mer strikt: Barberaren i Sevilla

"Barberaren i Sevilla rakar alla som inte rakar sig själva"

Lite mer strikt: Barberaren i Sevilla

"Barberaren i Sevilla rakar alla som inte rakar sig själva" Vem rakar barberaren i Sevilla?

Lite mer strikt: Barberaren i Sevilla

> "Barberaren i Sevilla rakar alla som inte rakar sig själva" Vem rakar barberaren i Sevilla?

Om barberaren i Sevilla rakar sig själv, så rakar han enligt regeln *inte* sig själv.

Lite mer strikt: Barberaren i Sevilla

"Barberaren i Sevilla rakar alla som inte rakar sig själva" Vem rakar barberaren i Sevilla?

Om barberaren i Sevilla rakar sig själv, så rakar han enligt regeln *inte* sig själv.

Om barberaren i Sevilla *inte* rakar sig själv, så rakar han enligt regeln sig själv.

Lite mer strikt: Barberaren i Sevilla

"Barberaren i Sevilla rakar alla som inte rakar sig själva" Vem rakar barberaren i Sevilla?

Om barberaren i Sevilla rakar sig själv, så rakar han enligt regeln *inte* sig själv.

Om barberaren i Sevilla *inte* rakar sig själv, så rakar han enligt regeln sig själv.

Återigen verkar det alltså som att det inte finns någon bra upplösning på problemet.

Ännu lite mer strikt: Mängden av alla mängder som inte innehåller sig själv

Ännu lite mer strikt: Mängden av alla mängder som inte innehåller sig själv

"Låt X vara mängden av alla mängder som inte innehåller sig själv"

Ännu lite mer strikt: Mängden av alla mängder som inte innehåller sig själv

"Låt X vara mängden av alla mängder som inte innehåller sig själv" Innehåller X sig själv?

Ännu lite mer strikt: Mängden av alla mängder som inte innehåller sig själv

> "Låt X vara mängden av alla mängder som inte innehåller sig själv" Innehåller X sig själv?

Om X innehåller sig själv, $X \in X$, så borde X *inte* innehålla sig själv.

Ännu lite mer strikt: Mängden av alla mängder som inte innehåller sig själv

"Låt X vara mängden av alla mängder som inte innehåller sig själv" Innehåller X sig själv?

Om X innehåller sig själv, $X \in X$, så borde X *inte* innehålla sig själv.

Om X *inte* innehåller sig själv, $X \notin X$, så borde X innehålla sig själv.

Ännu lite mer strikt: Mängden av alla mängder som inte innehåller sig själv

"Låt X vara mängden av alla mängder som inte innehåller sig själv" Innehåller X sig själv?

Om X innehåller sig själv, $X \in X$, så borde X *inte* innehålla sig själv.

Om X *inte* innehåller sig själv, $X \notin X$, så borde X innehålla sig själv.

Inte heller här går det att reda ut frågan på ett tillfredsställande sätt, trots att vi använder ett tills synes stringent, formaliserat uttryckssätt.

Vad är problemet?

Vad är problemet?

- En gemensam egenskap hos dessa tre 'paradoxer' är att påståendena/konstruktionerna refererar till sig själva i någon bemärkelse.

Vad är problemet?

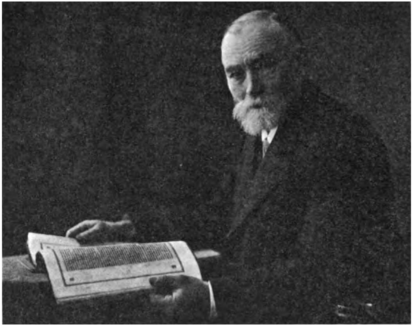
- En gemensam egenskap hos dessa tre 'paradoxer' är att påståendena/konstruktionerna refererar till sig själva i någon bemärkelse.
- Den första paradoxen brukar kalla "lögnarparadoxen".

Vad är problemet?

- En gemensam egenskap hos dessa tre 'paradoxer' är att påståendena/konstruktionerna refererar till sig själva i någon bemärkelse.
- Den första paradoxen brukar kalla "lögnarparadoxen".
- De två, senare relativt likartade 'paradoxerna' brukar kallas Russells paradox. Denna saboterade Freges projekt att bygga upp aritmetiken på logikens grundvalar.

Frege och logik som grund för matematiken

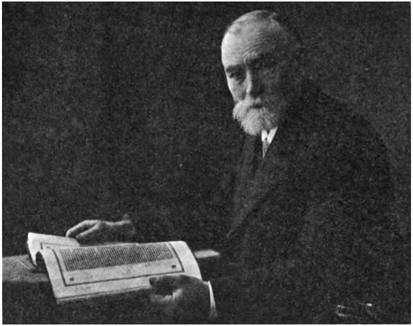
Frege och logik som grund för matematiken



(Foto: Emil Tesch)

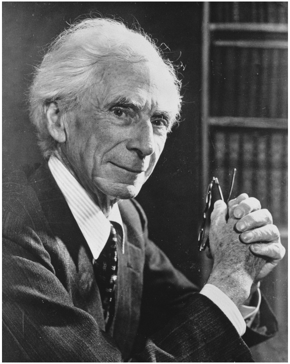
Frege: En mängd kan definieras genom valfri "formel"

Frege och logik som grund för matematiken



(Foto: Emil Tesch)

Frege: En mängd kan definieras genom valfri “formel”



Russell: Då blir det paradoxer!

Frege och logik som grund för matematiken (forts.)

Frege och logik som grund för matematiken (forts.)

- Freges *Grundgesetze der Arithmetik*: En mängd M kan definieras genom valfri "formel", $M = \{x : F(x)\}$, "Mängden M består av alla x som uppfyller villkoret $F(x)$.

Frege och logik som grund för matematiken (forts.)

- Freges *Grundgesetze der Arithmetik*: En mängd M kan definieras genom valfri "formel", $M = \{x : F(x)\}$, "Mängden M består av alla x som uppfyller villkoret $F(x)$.
- Det Russell observerade var att det i Freges system går att formulera villkoret "x uppfyller $F(x)$ om x inte tillhör x".

Frege och logik som grund för matematiken (forts.)

- Freges *Grundgesetze der Arithmetik*: En mängd M kan definieras genom valfri “formel”, $M = \{x : F(x)\}$, “Mängden M består av alla x som uppfyller villkoret $F(x)$.
- Det Russell observerade var att det i Freges system går att formulera villkoret “x uppfyller $F(x)$ om x inte tillhör x”.
- Ett sätt att försöka lösa upp den tredje paradoxen (som Russell arbetade med) är att inte tillåta definitioner av detta slag, utan kräva att allt det som ingår i villkoret redan är “färdigkonstruerat”.

Frege och logik som grund för matematiken (forts.)

- Freges *Grundgesetze der Arithmetik*: En mängd M kan definieras genom valfri "formel", $M = \{x : F(x)\}$, "Mängden M består av alla x som uppfyller villkoret $F(x)$.
- Det Russell observerade var att det i Freges system går att formulera villkoret "x uppfyller $F(x)$ om x inte tillhör x".
- Ett sätt att försöka lösa upp den tredje paradoxen (som Russell arbetade med) är att inte tillåta definitioner av detta slag, utan kräva att allt det som ingår i villkoret redan är "färdigkonstruerat".
- Detta arbete (och mer) är samlat i *Principia Mathematica* (Russell och Whitehead)

Informella argument

Informella argument

- Nog det vanligaste i skolmatematiken

Informella argument

- Nog det vanligaste i skolmatematiken
- Exempel: Vinkelsumman i en triangel är 180 grader, eftersom vi ser det om vi kollar på några trianglar.

Informella argument

- Nog det vanligaste i skolmatematiken
- Exempel: Vinkelsumman i en triangel är 180 grader, eftersom vi ser det om vi kollar på några trianglar.
- Exempel: “Det blev så när jag räknade”

Informella argument

- Nog det vanligaste i skolmatematiken
- Exempel: Vinkelsumman i en triangel är 180 grader, eftersom vi ser det om vi kollar på några trianglar.
- Exempel: “Det blev så när jag räknade”
- Exempel: “Funktionen f växer snabbare än funktionen g, så efter ett tag blir den större”

Normalstrikta matematiska bevis

Normalstrikta matematiska bevis

- Kanske det man siktar mot i skolmatematiken

Normalstrikta matematiska bevis

- Kanske det man siktar mot i skolmatematiken
- Exempel: Derivatan av funktionen f som ges av $f(x) = x^2$ är $f'(x) = 2x$, eftersom derivatans definition ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x + h \\ &= 2x \end{aligned}$$

Fullt ut formaliserade bevis

Fullt ut formaliserade bevis

$*54{\cdot}43.\ \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash . \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Exempel ur Principia Mathematica.

Historisk trend

Historisk trend

- Mycket tidig historia: Praktiskt motiverad matematik, utan argument/bevis

Historisk trend

- Mycket tidig historia: Praktiskt motiverad matematik, utan argument/bevis
- Den moderna axiomatiska matematiken födelse i Grekland

Historisk trend

- Mycket tidig historia: Praktiskt motiverad matematik, utan argument/bevis
- Den moderna axiomatiska matematiken födelse i Grekland
- Rörelse mot att formalisera mer och mer av matematiken, mot slutet av 1800-talet

Historisk trend

- Mycket tidig historia: Praktiskt motiverad matematik, utan argument/bevis
- Den moderna axiomatiska matematiken födelse i Grekland
- Rörelse mot att formalisera mer och mer av matematiken, mot slutet av 1800-talet
- De formalistiska och logicistiska programmen runt sekelskiftet (Frege, Hilbert, Russell).

Hilberts program

Hilberts program

- 1872: Emil du Bois-Reymond "*Ignoramus et ignorabimus*"

Hilberts program

- 1872: Emil du Bois-Reymond “*Ignoramus et ignorabimus*”
- 1930: David Hilbert “In opposition to the foolish *ignorabimus* our slogan shall be *Wir müssen wissen – wir werden wissen*”

Hilberts program

- 1872: Emil du Bois-Reymond "*Ignoramus et ignorabimus*"
- 1930: David Hilbert "In opposition to the foolish *ignorabimus* our slogan shall be *Wir müssen wissen – wir werden wissen*"
- Det sätt som detta skulle göras på var att

Hilberts program

- 1872: Emil du Bois-Reymond "*Ignoramus et ignorabimus*"
- 1930: David Hilbert "In opposition to the foolish *ignorabimus* our slogan shall be *Wir müssen wissen – wir werden wissen*"
- Det sätt som detta skulle göras på var att
  - formulera ett ändligt antal axiom
  - härleda all befintlig matematik ur dessa axiom
  - bevisa att detta axiomsystem är *konsistent* (fritt från motsägelser)

Hilberts program

- 1872: Emil du Bois-Reymond "*Ignoramus et ignorabimus*"
- 1930: David Hilbert "In opposition to the foolish *ignorabimus* our slogan shall be *Wir müssen wissen – wir werden wissen*"
- Det sätt som detta skulle göras på var att
  - formulera ett ändligt antal axiom
  - härleda all befintlig matematik ur dessa axiom
  - bevisa att detta axiomsystem är *konsistent* (fritt från motsägelser)
- Till detta kom *Hilberts problem*, en uppsättning om 23 vägledande problem från olika matematikområden

Gödels ofullständighetssats

Gödels ofullständighetssats

Redan 1931 visade det sig att Hilberts program inte skulle fungera (i alla fall inte i sin helhet):

Gödels ofullständighetssats

Redan 1931 visade det sig att Hilberts program inte skulle fungera (i alla fall inte i sin helhet):

Sats (Gödel, 1931)

Varje formellt system som är tillräckligt starkt för att formulera grundläggande aritmetik är antingen ofullständigt eller inkonsistent.

Gödels ofullständighetssats

Redan 1931 visade det sig att Hilberts program inte skulle fungera (i alla fall inte i sin helhet):

Sats (Gödel, 1931)

Varje formellt system som är tillräckligt starkt för att formulera grundläggande aritmetik är antingen ofullständigt eller inkonsistent.

Ofullständigt: Det finns frågor som kan formuleras inom systemet som inte kan besvaras inom systemet.

Gödels ofullständighetssats

Redan 1931 visade det sig att Hilberts program inte skulle fungera (i alla fall inte i sin helhet):

Sats (Gödel, 1931)

Varje formellt system som är tillräckligt starkt för att formulera grundläggande aritmetik är antingen ofullständigt eller inkonsistent.

Ofullständigt: Det finns frågor som kan formuleras inom systemet som inte kan besvaras inom systemet.

"Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I"

Gödels ofullständighetssats

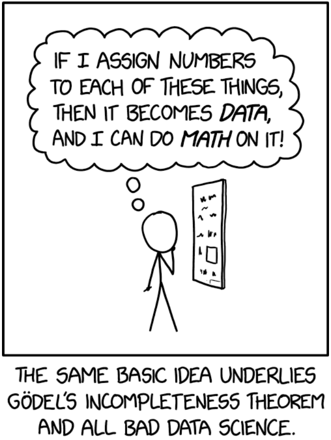
Gödels ofullständighetssats

Hilbert: Man borde kunna bevisa allt

Gödel: Då blir det paradoxer!

Hur kan man bevisa något sådant?

Hur kan man bevisa något sådant?



xkcd.com (Randall Munroe)

Gödelnumrering

Gödelnumrering

För att kunna behandla vilka matematiska uttryck som helst med aritmetiska operationer, så översatte Gödel hela matematikens formelspråk till tal. Detta kan göra på många olika sätt.

Gödelnumrering

För att kunna behandla vilka matematiska uttryck som helst med aritmetiska operationer, så översatte Gödel hela matematikens formelspråk till tal. Detta kan göra på många olika sätt.

Number	Symbol	Meaning
666	0	zero
123	S	successor function
111	=	equality relation
212	<	less than relation
112	+	addition operator
236	×	multiplication operator
362	(	left parenthesis
323	)	right parenthesis

Number	Symbol	Meaning
262	x	a variable name
163	*	star (used to make more variables)
333	∃	existential quantifier
626	∀	universal quantifier
161	∧	logical and
616	∨	logical or
223	¬	logical not

En oavgörbar fråga

En oavgörbar fråga

Kom ihåg:
Det Russell observerade var att man i Freges system kan formulera villkoret $F(x)$ som "x uppfyller $F(x)$ om x inte tillhör x".

En oavgörbar fråga

Kom ihåg:
Det Russell observerade var att man i Freges system kan formulera villkoret $F(x)$ som "x uppfyller $F(x)$ om x inte tillhör x".

Det Gödel visade var

En oavgörbar fråga

Kom ihåg:
Det Russell observerade var att man i Freges system kan formulera villkoret $F(x)$ som "x uppfyller $F(x)$ om x inte tillhör x".

Det Gödel visade var

- Att det i hans system går att *räkna ut* om något är ett bevis: Givet Gödeltalet m för en följd av argument A, och Gödeltalet n för en sats S, så går det att avgöra *med aritmetik* om A är ett bevis för S.

En oavgörbar fråga

Kom ihåg:
Det Russell observerade var att man i Freges system kan formulera villkoret $F(x)$ som "x uppfyller $F(x)$ om x inte tillhör x".

Det Gödel visade var

- Att det i hans system går att *räkna ut* om något är ett bevis: Givet Gödeltalet m för en följd av argument A, och Gödeltalet n för en sats S, så går det att avgöra *med aritmetik* om A är ett bevis för S.
- Att det går att formulera en sats som säger "Jag är inte bevisbar" i detta system. Den kan varken vara bevisbar eller inte bevisbar, alltså är den oavgörbar!

Några kommentarer

Några kommentarer

- En stor del av den matematik som faktiskt är i bruk går att formalisera med svagare system, så att man undviker ofullständighetssatsens bevismetod

Några kommentarer

- En stor del av den matematik som faktiskt är i bruk går att formalisera med svagare system, så att man undviker ofullständighetssatsens bevismetod
- Hilberts 10:e problem, att finna en effektiv metod för att lösa vilken Diofantisk ekvation som helst (eller bevisa att den inte har lösningar) kan inte lösas. Det är oavgörbart vilka Diofantiska ekvationer som är lösbara

Några kommentarer

- En stor del av den matematik som faktiskt är i bruk går att formalisera med svagare system, så att man undviker ofullständighetssatsens bevismetod
- Hilberts 10:e problem, att finna en effektiv metod för att lösa vilken Diofantisk ekvation som helst (eller bevisa att den inte har lösningar) kan inte lösas. Det är oavgörbart vilka Diofantiska ekvationer som är lösbara
- Exempel: Det är oavgörbart om någon av spelarna i kortspelet *Magic – The Gathering* har en vinnande strategi

Vilka lärdomar kan vi dra?

Vilka lärdomar kan vi dra?

- Det finns vissa formella gränser för formaliseringens möjligheter

Vilka lärdomar kan vi dra?

- Det finns vissa formella gränser för formaliseringens möjligheter
- Möjligheten till självreferenser ställer till problem!